GUILELMI OUGHTRED AETONENSIS,

quondam Collegii Regalis in CANTABRIGIA Socii,

CLAVIS MATHEMATICÆ DENVO LIMATA,

Sive potius

FABRICATA.

Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus, quæ in sequenti pagina recensentur.

Editio tertia auctior & emendatior.

OXONIÆ,
Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt apud THO. ROBINSON. 1652.

Tractatus, qui sequuntur, hi sunt.



AD LECTOREM.



Onſcripſi olim in Familia Illuſtriſſimi nuper Comitis *Arundeliæ* & *Surriæ*, cum ex filiis ejus alteri in diſciplinis Mathematicis exponendis deſervierim, ordinem quendam, qui mihi ad myſteria Mathematica videbatur appoſitiſſimus, ut ſtudioſorum, qui ipſum ſecuturi ſunt, animi ſcientiis illis, non leviter & ſuperficie tenùs tingantur, ſed intimè & radicitùs imbuantur. Hunc meum ordinem multorum virorum doctorum, maximè verò nobiliſſimi illius eruditiſſimíque D^ni^ *Caroli Cavendiſh* hortatu, in publicum ſub titulo *CLAVIS MATHEMATICÆ* primò emiſi. Tractatus quidem ille, non methodo (ſicut vulgò fit) Synthetica, per Theoremata atque Problemata longo verborum ambitu deſcriptus, ſed via inventionis Analytica, (ita ut totus ſit quaſi demonſtratio continua nexibus firmiſſimis compaginata) & non tam verbis quàm rerum ſpeciebus depictus, primo adſpectu difficultatem peperit in multis, qui forma tradendi inuſitata territi, Chimæram aut Sphyngem

aliquam imaginabantur: Verùm ſiquis, præjudicii hæc terriculamenta adſpernatus, attentè præſentíque animo hanc viam ingrediatur, rem videbit maximè facilem & conſpicuam. Nam ſpecioſus hic atque ſymbolicus modus, nec memoriam verborum multiplicitate torquet, nec phantaſiam rerum multarum comparatione atque dijudicatione onerat ac diſtrahit; ſed operationis atque argumentationis totius proceſſum conſpectui repræſentans: Theorema denique profert, non uni tantum genti intelligendum, ſed omnium, quotquot ſunt ubique terrarum, nationum linguis (modò de notis conſtet) efferendum.

Animi quidem mei ſenſus & votum, tum in prima Clavis meæ formatione, tum in ſecunda limatione, ſive potius nova fabricatione, fuit, ut Matheſeos ſtudioſis quaſi Ariadnes filum porrigerem, quo ad intima harum ſcientiarum adyta deducantur, & ad optimos antiquiſſimóſque Authores, *Euclidem*, *Archimedem*, *Apollonium Pergæum* magnum illum Geometram, *Diophantum*, ac reliquos, facilius penitiúſque intelligendos dirigantur; eorumque non propoſitiones modo addiſcant, quod pleriſque Mathematicis ſcientiæ quaſi culmen eſt & faſtigium; Sed etiam percipiant qua ſolertia, quibus æquationum, interpretationum, comparationum, reductionum, converſionum, atque diſquiſitionum moliminibus priſci illi heroës ſcientiam hanc pulcherrimam ornaverint, auxerint, invenerint.

Mihi quidem in illis legendis verſanti, & demonſtrationes ingenioſiſſimas ex incogitatis & inexpectatis,

tis, ſed divino quodam artificio conquiſitis, principiis adeò affabrè concinnatas animadvertenti admirantíque ſtupor incidit, unde tanta exiſteret imaginationis vis, quæ tam immenſam conſequentiarum molem ſuſtinere poſſet, faceréque ut tot res, tam longe diſſitæ animo ſimul obverſentur, & quaſi ultrò in argumenti unius ſtructuram coëant atque conſidant.

Quapropter ut ipſas res clariùs intuerer, propoſitiones & demonſtrationes verborum integumentis exutas, brevibus tantùm ſymbolis ac notis oculis etiam ipſis uno obtutu perſpiciendas deſignavi. Tum Theorematum affectiones varias in æqualitate, proportione, affinitate, atque dependentia, conferendo nova elicere tentavi. Denique quæſtiones conſimiles problematicè fingendo, eaſque quaſi jam confectas, via Analytica in ſua principia reſolvendo, rationes ac media, quibus conſtruantur inveſtigavi. Hinc tandem (non niſi plurimorum annorum uſu atque experientia) præceptorum illa qualiſcunque ſeges emerſit.

Non erat mihi animus, jam ad extremam ſenectutem appropinquanti, poſt *primam* hujuſce Clavis Editionem, in hanc iterum arenam prodiiſſe. Sed Venerabilis Vir Dn: *Sethus Ward*, Collegii Sidneienſis in Academia Cantabrigienſi tum Socius, nunc in Oxonienſi Profeſſor Aſtronomiæ Savilianus, Vir prudens, pius, ingénuus, nec Matheſi ſolùm, ſed & omni politioris literaturæ genere cultiſſimus, (qui primus Cantabrigiæ Clavis meæ uſum expoſuit) mei videndi & cognoſcendi deſiderio, domi me latitantem longo

itinere

itinere perquisivit; cujus importuno hortatui, ut libellum illum sub *secunda* lima correctiorem auctiorémque quorundam, ex multis quæ apud me erant, adjectione ederem, resistendi facultas non erat. Accessit & alter hortator vehemens Dn. *Carolus Scarbrough* Doctor Medicinæ, suavissimis moribus, perspicacissimóque ingenio Vir, cujus tanta est in Mathesi solertia, & supra fidem fælix tenaxque memoria, ut omnes Euclidis, Archimedis, aliorúmque nonnullorum ex antiquis propositiones & demonstrationes recitare ordine & in usum proferre potis sit. Horum ego duorum judicio de meis lubens acquiesco, Ii enim sunt quos celeberrimæ totius Europæ Academiæ, Mathematicarum aliarúmque artium humaniorum Professores meritò amplexentur.

Quod autem a mendis illis Typographicis, quibus priores nimium scatebant, repurgata hæc *tertia* editio exhibeatur (quod in hujusmodi scriptis maximi sit momenti) curæ illud debetur Venerabilis Viri Dn. *Joannis Wallis*, Collegii Emanuëlensis Cantabrigiæ non ita pridem Alumni; deinde Collegii Reginalis ibidem Socii; nunc apud Oxonienses Geometriæ Professoris Saviliani; Viri ingenui, pii, industrii, in omni reconditiore literatura versatissimi, in rebus Mathematicis admodum perspicacis, & in enodatione explicationéque Scriptorum intricatissimis *Zipherarum* involucris occultatorum (quod ingenii subtilissimi argumentum est) ad miraculum fælicis. Huic enim ille editioni adornandæ ultrò se offerens, & Calculi maximam partem examinavit, & Operas perpetuo auxilio, atque assidua inspectione adjuvit.

Denique

Denique non ſine piaculo omittam amantiſſimum mei Dn. *Robertum Wood* Collegii Lincolnienſis Socium, Philoſophiæ atque Medicinæ ſtudioſum, Virum optimum atque doctiſſimum, qui non calamo ſolùm, & ſcriptorum examinatione, nequid fortè mihi in computationibus erroris exciderit, amicum præſtitit officium, ſed etiam bene maximam horum partem Anglicè non ita pridem edendam tranſtulit.

Partem autem illam quæ Geometricam Horologiorum Sciotericorum rationem tradit, ex Anglico idiomate in Latinum vertit Dn: *Chriſtophorus Wren*, Collegii Wadhamenſis Commenſalis Generoſus, Admirando prorſus ingenio Juvenis, qui nondum ſexdecim annos natus, Aſtronomiam, Gnomonicam, Staticam, Mechanicam præclaris inventis auxit, ab eoque tempore continuo augere pergit; & revera is eſt à quo magna poſſum (neque fruſtra) propediem exſpectare.

Huic Clavi Mathematicæ, poſt primam editionem, accedit I, Affectarum quovis modo Æquationum in numeris luculenta reſolutio. II, Elementi Euclidis Decimi declaratio. III, Elementorum Euclidis Decimi tertii & Decimi quarti de Solidis Regularibus illuſtratio. IV, Sex Theorematum fundamentalium circa Anatociſmum inventio. V, Regulæ falſæ poſitionis demonſtratio Analytica. VI, Theorematum Archimedis de Sphæra & Cylindro declaratio. VII, Horologia Sciotérica in Plano, Geometrica delineandi Methodus. Ultimò, inveniet etiam hîc lector Logiſticæ decimalis (quam præ ſexagenaria illa Mathematices ſtudioſis, præſertim in

in computationibus Aſtronomicis, commendatam eſſe cupio) regulas breves interſertas: una cum Multiplicationis & Diviſionis contractione admodum neceſſaria: Et Logarithmorum uſum, quantum ſatis eſt.

Horum ego pleraque cum ante plurimos annos, in gratiam & uſum nobiliſſimi eruditiſſimíque Domini *Gerardi* Domini *Aungier* Baronis de *Longford*, hominis veræ pii atque Chriſtiani, doctíque non modò ſermonis utriuſque linguæ, ſed & Hebraïcæ aliarúmque linguarum Orientalium, ac utriuſque philoſophiæ, & de me optimè meriti, ſcripſerim; jure eum ſuo reticendo fraudare pro piaculo duxerim. Is enim eſt, quo fautore atque Mœcenate gloriari pro ſummo honore habeam.

Index Capitum.



I. CLAVIS MATHEMATICAE.

II. De



Index Capitum.

VIII. Horologiographia Geometrica.

CLAVIS



CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA.

CAP. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; ſed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, vid p. 37 tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

Integri. Partes.

9	8 7 6	5 4 3	2 1 0	$\bar{1}$ $\bar{2}$	$\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{5}$	$\bar{6}$ $\bar{7}$ $\bar{8}$	$\bar{9}$	&c.
M	MMM	MMM	C X I	XC	MMM	MMM	M	
M	MMM	C X I			I X C	MMM	M	
M	C X I					I X C	M	

2. In hâc tabellâ numeri ſuperiores ſunt Indices ſive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium; affirmativi in integris, negativi in partibus. Eſtque progreſſio in decuplâ ratione versùs ſiniſtram, & in ſubdecuplâ versùs dextram; ſicut literæ numerales ſubſcriptæ oſtendunt.

Eſt igitur progreſſio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et ſic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni aliâ Progreſſione, terminis ab unitate quacunque ratione ſive creſcentibus, ſive decreſcentibus, Indices ſui erunt apponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (ſive Integri ſint, ſive partes, ſive mixti) valores per gradus & periodos æſtimentur: tum quia Logiſtica hæc decimalis ſexagenariâ, in computationibus Aſtronomicis, multò facilior eſt atque concinnior. Hoc planè perſpexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à ſemidiametro 60, ad 1 cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fieret.

5. Partes decimales ſcribuntur in unâ lineâ cum integris, diſtinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò *ſeparatrix* dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur versùs ſiniſtram decuplando: ſic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur verſus dextram ſubdecuplando.

6. Partes decimales denominationem ſuam ſortiuntur à loco figuræ ſuæ ultimæ: ut 0|5 ſunt 5 decimæ partes: 0|56 ſunt 56 centeſimæ partes: 0|056 ſunt 56 milleſimæ partes, & ſic de reliquis omnibus.

7. Circuli ante integros, vel poſt partes decimales nihil valent: at verò poſt integros, & ante partes decimales

males (hoc est, utrinque lineæ separatrici proximi) vim suam retinent: nam gradus constituunt quibus figurarum valores censentur: ut 0005, significant tantummodo 5: & 0|500, 5 sunt decimæ partes.

8. Quare in partibus decimalibus scribendis, linea separatrix semper apponatur; & loci, si qui sunt, vacui, circulis suppleantur: ut 0|00005 sunt 5 centies millesimæ partes.

9. Signum addendi sive affirmationis est + plus, sive pl: ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi sive negationis est — minus, sive mi: ut — 34, negantur omninò esse.

11. Pertinet autem signum ad magnitudinem sequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non est præfixum signum negationis, intelligitur esse affirmata, & habere signum +, licet non sit expressum.

12 Et nota quod signis + & - utor, quando simplex magnitudo affirmatur vel negatur de simplice: signis autem pl: & mi: quando magnitudo composita affirmatur vel negatur de simplice, vel simplex de compositâ. p.54. l.14 p.57. l. 1

13. Magnitudines denotari possunt vel numeris mensuram ipsarum significantibus, vel etiam speciebus: ut linea longa septem uncias, designatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per duas literas terminis lineæ adscriptas, AB, BC, CD, &c. pro libitu: modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine species quælibet statuitur.

14. Speciosa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex sumptione quæsiti, tanquam noti, investigatur quæsitum) multo accommodatior est, quam illa numerosa. Nam in numerosâ, numeri à novo, quem proferunt, ita absorbentur, ut penitus dispareant, nec ullum sui vestigium relinquant: At in speciosâ, permanent species sine aliquâ mutatione, specimen exhibentes totius operationis: unde non solùm in quæsiti notitiam ducunt, sed etiam Theorema generale pro solutione consimilium quæstionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

Cap. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregatum. Ut 3 & 7 constituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & summas singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati simul æquantur Summæ.

Exempla

Exempla Additionis.

		l.	s.	d.
79403	3794 236	17	13	4
8956	584 3	9	16	7
67293	947 08	238	09	6
5087	4720 7439	70	00	10
160739	48 5	48	10	3
	10094 8599	384	10	6

4. Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas ſervatis ſignis

ad	3A	A	5A	3A	A
adde	A	-A	—3A	—5A	E
Sũma	3A+A	A-A	5A - 3A	3A - 5A	A+E
hoc eſt	4A	0	2A	-2A	

ad	A+B	A+B
adde	A-B	A-C
Summa	2A	2A+B-C

Sic in Indicum Additione: $\bar{2}$ $\bar{3}$ / 3 2 / 1 | $\bar{1}$

Cap. III. *De Subductione.*

1. NUmerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Exceſſus. Ut è 7 tolle 3, reſtat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Subductione, numerus ſubducendus, unà cum differentiâ, æquatur numero ex quo. *ſubducitur*

Exempla Subductionis.

		l.	s.	d.
347206836	3794|236	17	13	4
6807592	947|08	9	16	7
340399244	2847|156	7	16	9

4. Subductio *ſpecioſa* conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus ſignis magnitudinis ſubducendæ.

Ex	4 A	3 A	5 A	A
tolle	A	5 A	-3 A	E
Reſtat	4 A-A	3 A-5 A	5 A+3 A	A-E
hoc eſt	3 A	-2 A	8 A	

+ tolle signum

Ex	A	A	Sic in Indicum ſubductione.	$\frac{3}{2}$	$\frac{\overline{3}}{2}$
tolle	B+C	B-C			
Reſtat	A-B-C	A-B+C		5	$\overline{5}$

C AP. IV. *De Multiplicatione.*

1. NUmerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus; vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propoſitis habetur

betur pro longitudine, alter pro latitudine: & numeri propositi dicuntur Factores atque Latera. Maxima quippe binarum magnitudinum potestas, est figura ex ipsis composita, cujus anguli sunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & singulas figuras unius numeri dati, in singulas alterius figuras ducit: & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam summam colligit. Et si partes decimales numeris propositis sint admixtæ, è toto facto tot locos lineâ separatrice abscindit, quot sunt loci partium in utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujusque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis. Sic 58|73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ 6 in 600, est 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58|73 est $\bar{1}$. addantur Indicès 2 & $\bar{2}$, extabit o pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ idcircò pertinet ad locum unitatum. Et consimilis reliquarum figurarum in facto censura gradualis institui poterit.

3. Si è numeris propositis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omissis circulis, fiat ipsorum numerorum Multiplicatio: & facto demùm tot insuper integrorum loci accenseantur, quot sunt omissi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione est, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut si ducatur 4 in 6 fiet 24: Est igitur 1. 4: : 6.24: vel 1.6: : 4.24.

Exempla Multiplicationis.

4576	580(34
892	47(5
9152	290170
41184	406238
36608	232136
4081792	27566(150

358	58(73
600	600
214800	35238

5. Contractio Multiplicationis, in Logistica valdè utilis, sic est. Si instituto tuo sufficiat habere factum non integrum, sed multatum aliquot ex ultimis figuris: statues unitatis locum minoris numeri, sub illâ figurâ majoris, cujus Index æqualis sit numero figurarum, vel abscindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, sub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ est supra eam figuram minoris, quâ multiplicatur: habitâ tamen ratione incrementi, quod ex subsequentibus figuris majoris numeri suppeditatur. Hujus compendii casus sunt quatuor.

Casus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris sub unitatis lo-

co majoris. Ut in exemplo, ubi 246|914 ductus in 35|27 producit 8708 integros, abscissis omnibus partibus decimalibus.

```
 246|914
  72|53
 -------
 7407
 1235
   49
   17
 -------
 8708
```

Casus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium, puta quatuor: Statues unitatis locum minoris numeri sub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708|6568 mixtus cum quatuor locis partium.

```
 246|914
    72|53
 ---------
 74074200
 12345700
   493828
   172840
 ---------
 8708|6568
```

Casus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: statues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 sinus graduum 54 multiplicandus est per 39875 sinum maximæ declinationis 23° 36: prodibit 32260 sinus declinationis solis ad ♉ 24°.

```
 80902
 57893
 -----
 24271
  7281
   647
    57
     4
 -----
 32260
```

Casus

Casus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia 5 — 4 = 1: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locũ majoris. Ut in exemplo ubi sinus 42262 multiplicatur per 0,0064, ita ut abscissis à facto quinque figuris ultimis, restituantur quatuor loci partium: Factus erit 0,0027.

```
   42262
   46000
   -----
      25
       2
   -----
 0,0027
```

6. Multiplicatio *speciosa* connectit utramque magnitudinem propositam cum notâ in vel ×: vel plerumque absque notâ, si magnitudines denotentur unicâ literâ. Et, si signa sint similia, producta magnitudo erit affirmata: sin diversa, negata. Effertur autem per in.

Et nota, quòd A in A, sive A × A, sive A A, est Aq. AAA sive AqA, est Ac. AAAA, sive Aq Aq, sive AcA, est Aqq. AAAAA, sive AcAq, sive AqqA, est Aqc. AAAAAA, sive Ac Ac, sive Aqq Aq, sive AqcA, est Acc, &c. Nam potestas quælibet superior fit ex duabus inferioribus, quarum dimensiones simul æquantur numero dimensionum superioris. Quot autem magnitudines sunt quæ multiplicantur, totidem sunt dimensiones.

Duc	A	A + E	A − E	A + E + I	B + 1
in	E	B	B	Z	A
fiet	AE	BA + BE	BA − BE	ZA + ZE + ZI	BA + A

In numero facto, Consona ante Vocales.

Species aliqua in seipsum ducta producit speciem illam cujus index duplex est indicis suiipsius. Sic Aq (cujus index 2) in Aq facit Aqq (cujus index 4)

Duc.

Duc $3A$ in $2A$	AE A	AE AE	$A+E$ $A+E$	$A+E$ $A-E$
fiet $6Aq$	AqE	$AqEq$	$Aq+AE$ $+AE+Eq$ $Aq+2AE+Eq$	$Aq+AE$ $-AE$ $-Eq$ $Aq-Eq$

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet si magnitudines constent binis literis. Ut si latus $AB+CD$ multiplicandum sit in se, producetur quadratum $ABq+2AB\times CD+CDq$.

Cap. V. *De Divisione.*

1. Numerus inventus per Divisionem dicitur Quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex applicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et si numerus ad numerum applicetur cum lineolâ interjectâ, ostendit quod numerus ille superior dividendus sit per inferiorem, ad quem applicatur: ut $\frac{12}{4}$ & $\frac{5}{12}$.

2. Divisio incipit ad sinistram: & (postquam ex dividendo sufficientem divisori dividuum distinxerit, & sub ipso divisorem subscripserit, vel saltem subscriptum cogitaverit) singulas figuras divisoris ex singulis ipsius dividui figuris supra stantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum divisore per quotum inventum multiplicato, factoque ablato ex dividuo, divisorem in locum proximè sequentem promovet, novamque uti prius divisionem instituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet autem

tem quotus particularis inuentus, ejuſdem debet eſſe loci, ſive gradus, cujus eſt figura dividendi, quæ ſtat, vel cogitatur ſtare ſupra unitatis locum diviſoris. Nam in Diviſione, Index cujuſque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ dividentis ex Indice figuræ diviſæ. Sic 171|4 diviſus per 857, dat 0|2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 eſt 1; & Index primæ figuræ diviſoris 8 eſt 2: Tollatur 2 ex 1, reſtabit 1̄ pro Indice primæ figuræ: quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et ſi diviſor adjunctos ſibi habeat ad dextram circulos: omiſſis circulis, & abſciſſis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat diviſio. In fine autem diviſionis reſtituendi ſunt, tum omiſſi circuli tum figuræ abſciſſæ.

4. In Diviſione eſt, ut Diviſor ad unitatem, ſic dividuus ad Quotum: vel ut dividuus ad diviſorem, ſic Quotus ad unitatem. Ut diviſo 24 per 6, quotus erit 4: Eſt igitur 6.1::24.4: Item 24.6::4.1.

5. Si magnitudo facta ſit ex duabus magnitudinibus, una ex iis ipſam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Diviſione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod multiplicatio conficit, Diviſio diſſolvit. Quare in applicatione magnitudinis ad magnitudinem, ſi eadem magnitudo ſit tum ſupra lineam, tum infra, expungatur utrobique.

Exempla

Exempla Divisionis.

12
8921317
297) 187135078 (630084 $\frac{127}{297}$
178213768
892118
2901
438257
580|34) 27866150 (475
2321368
406237
2901

187135075 (630084 $\frac{127}{297}$
297
1782
893
297
891
2507
297
2376
1315
297
1188
127

6|000) 4320765 (720|1275

8. Aliquando numerus aliquis dividi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, sive integer sit, sive mixtus. Atque in hoc casu, sumptis, quot opus est, è primoribus figuris divisoris pro primo divisore, per ipsas divides numerum propositum: deinde pro singulis particularibus divisionibus subsequentibus, divisorem minues amputando versus sinistram totidem ultimas figuras, donec quotum satis amplum inveneris: ut si dividantur 467023 per numerum infinitum 357(0926425, Quotus erit 1307(80 ferè.

```
                          17
                         303
                        2803
                      100930
357(0926425) 467023(1307(85..
. . .  . .  .  .
                      357093
                      107127
                        2800
                         286
```

Pulcherrima hæc est Divisionis contractio, & maximi usus in computationibus Astronomicis. Ut si per 137638 dividendus sit 126223 ductus in sinum totum, hoc est auctum quinque circulis: Appones tantummodò unum circulum: & pro quatuor reliquis minues divisorem. Ut
137638) 1262230 (91707.

9. Divisio *speciosa* statuit magnitudinem dividentem sub dividendâ, cum lineolâ interjectâ: tum considerat

ſiderat an magnitudo aliqua utramque communitèr multiplicaverit; atque ipſam utrobique expungit. Diviſio autem in iiſdem ſignis dat +, in diverſis -: autem per ad effertur.

Applica ad	$\frac{AE}{A}$	$\frac{BAc}{Aq}$	$\frac{BA+A}{A}$	$\frac{BA-CA}{B-C}$	$\frac{6Aq}{3A}$	ſcil. $\frac{2 \times 3\,Aq}{3\,A}$
Oritur	E	BA	B+1	A	2A	2 A

Cap. VI. *De Proportione.*

1. Si è quatuor numeris datis, primus ita ſe habeat ad ſecundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri eſſe proportionales. Numerorum autem ad ſe invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per conſequentem: ut 31 ad 7 ratio eſt $4\frac{3}{7}$, hoc eſt quadrupla ſupertripartiens ſeptimas.

2. Quare ſi numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et ſi numerus duos numeros dividat, quoti erunt diviſis proportionales.

Ut $4 \times \begin{cases} 7.\ 28. \\ 9.\ 36. \end{cases}$ & $4)\begin{matrix} 28\ (7. \\ 36\ (9. \end{matrix}$

Item $A \times \begin{cases} B.\ BA. \\ C.\ CA. \end{cases}$ & $A)\begin{matrix} BA.\ B. \\ CA.\ C. \end{matrix}$

3. Quare ſi quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis. 7. 9 :: 7×4. 9×4 :: 28. 36. At $7 \times 9 \times 4 = 9 \times 7 \times 4$.

4. Hinc ſequitur aurea (quæ dicitur) regula Proportionis.

vel quod eodem redit si 2us applicetur ad 1um et 3us ducatur in quotum factum erit 4us proportionalis |3| vel si 3us applicetur ad 1m et 2us ducatur in quotum |4| vel si 1us appli. ad 2m et 3us ad quotum ... |5| vel si 1us appli ad 3um et quotus ad 2m ... R. S :: A. $\frac{SA}{R}$

portionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum sub secundo & tertio applicetur ad primum: hoc est, si secundus multiplicet tertium, & primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati sunto 7, 9, 28: & pro quarto quæsito statuatur Q. Est igitur 7. 9 :: 28. Q. Quare $7Q = 9 \times 28$. Ideoque $\frac{9 \times 28}{7} = Q$. Item 5. 12 :: 8. $\frac{8 \times 12}{5}$, hoc est $19\frac{1}{5}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum, duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæstionem; estque in Proportione Directâ primus terminus (sive Divisor) homogeneus ei per quem fit quæstio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus (sive Divisor) ipse est per quem fit quæstio.

6. Directa quidem Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum majorem requirit: & quo minor eô minorem.

7. Reciproca Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum minorem requirit: & quô minor, eô majorem.

8. Proportio continua ∺ est, quando termini omnes medii inter primum & ultimum, rationum sunt tum consequentes, tum antecedentes. Ut 8, 12, 18, 27, sunt ∺. Nam 8. 12 :: 12. 18 :: 18. 27.

Item α, β, $\frac{\beta q}{\alpha}$, $\frac{\beta c}{\alpha q}$, $\frac{\beta qq}{\alpha c}$, $\frac{\beta qc}{\alpha qq}$, &c. sunt ∺

Quare si in hâc serie ultimus terminus sit ω, & summa omnium terminorum totius progressionis sit Z: erit Z-ω summa omnium antecedentium: & Z-α summa omnium consequentium.

9. Si

9. Si quatuor magnitudines sint proportionales, A . α :: B . β : etiam alternè, & inversè, & compositè, & divisim, & conversè, & mixtim proportionales erunt,

	$A . \alpha ::$	$B . \beta$
alternè,	$A . B ::$	$\alpha . \beta$
inversè,	$\alpha . A ::$	$\beta . B$
compositè	$A+\alpha . \alpha ::$	$B+\beta . \beta$
vel,	$A+B . B ::$	$\alpha+\beta . \beta$
divisim	$A-\alpha . \alpha ::$	$B-\beta . \beta$
vel	$A-B . B ::$	$\alpha-\beta . \beta$
conversè	$A . A \pm \alpha ::$	$B . B \pm \beta$
vel	$A . A \pm B ::$	$\alpha . \alpha \pm \beta$
mixtim	$A+\alpha . A-\alpha ::$	$B+\beta . B-\beta$
vel	$A+B . A-B ::$	$\alpha+\beta . \alpha-\beta$

10. Si quotlibet magnitudines sint proportionales, erit ut unus antecedens, ad suum consequentem; sic summa antecedentium, ad summam consequentium. Esto $A . \alpha :: B . \beta :: C . \gamma :: D . \delta$: erit $A . \alpha :: A+B+C+D . \alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Nam $\begin{cases} A . \alpha :: B . \beta . \text{ \& compositè} \\ A+B . \alpha+\beta :: (B . \beta ::) C . \gamma \text{ \&} \\ A+B+C . \alpha+\beta+\gamma :: (C . \gamma ::) D . \delta . \text{ \&c.} \end{cases}$

Item in ∺, $\alpha . \beta :: Z-\omega . Z-\alpha$. Quare $\alpha Z - \alpha q = \beta Z - \beta \omega$. vel $\beta Z - \alpha Z = \beta\omega - \alpha q$.

Hinc obitèr liquet inventio summæ omnium terminorum ∺, sive Progressionis Geometricæ: per hanc Regulam $\left\{ \frac{\beta\omega - \alpha q}{\beta - \alpha} = Z. \right.$

11. Si plurium proportionum antecedentes sint æquales; erit ut unus antecedens, ad summam suorum consequentium: Sic alter antecedens ad summam

ſuorum. Eſto A. B:: $\alpha.\beta$: & A. C:: $\alpha.\gamma$:: & A. D:: $\alpha.\delta$: erit A. B+C+D:: $\alpha.\beta+\gamma+\delta$. Liquet ex priore demonſtratione, terminis alternè poſitis.

12. Si binarum rationum conſequentes ſint æquales, ſunt ut antecedentes. Si verò antecedentes ſint æquales, ſunt reciprocè ut conſequentes.

$\frac{7}{1}.\frac{9}{1}::7.9.$ Et $\frac{1}{9}.\frac{1}{7}::7.9.$

13. Si bis quatuor magnitudines ſint ſimiliter proportionales; ipſarum etiam tum ſummæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur: etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt. Sequitur ex 3.

15. Ratio antecedentis ad conſequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad conſequentem: vel ex ratione tertii ad conſequentem, & antecedentis ad tertium. Ut

$$7.9:: \times \begin{cases} 7. & A. \\ A. & 9. \end{cases} \quad \text{Item } 7.9 :: \times \begin{cases} A. & 9. \\ 7. & A. \end{cases}$$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Aſtronomicis.

Si 100000 ſit primus terminus, invenitur quartus per 5, Cap. 4. Caſ.3. Ut

100000. 80902:: 39875.32260.

Si 100000 ſit ſecundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap. 5. Ut

137638. 100000:: 126223.91707.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Proſthaphæreſeon.

In

In tabulis Prutenicis, Ad epicyli primi Lunæ Anomaliam Gr: 62, Prosthaph: ablativa est Gr: 4|1786. & Differentia ibidem Gr: 0|0433: Quanta ejus pars debetur Anomaliæ Gr: 62|5667? Dic

1. 0|0433 :: 0|5667. 0|0245 : per cap. 4: sect. 5. Cas. II. Tum 4|1786 + 0|0245=4|2031: quæ est Prosthaph: correcta.

Et contrà si quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Prosthaphæresi Grad: 4|2031. Proximè minor in Canone est Gr: 4|1786, respondens Anomaliæ Gr: 62: Estque Differentia ibidem Gr: 0|0433. Est autem 4|2031 - 4|1786=0|0245. Dic

0|0433. 0|0245 :: 1. 0|566+, partes adjungendæ Gr: 62. Eritque Anomalia quæsita Gr: 62|566+.

18. Conversio partium Sexagesimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexagesimales.

Partes Sexagesimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decimales, puta 0|75, convertuntur in Sexagesimas, multiplicando per 60.

Ut 6|0. 4|5 :: 1. 0|75. } Nam
& 1. 0|75 :: 60. 45. }

Divisio per 60, removet lineam separatricem uno loco versus sinistram, & insuper dividit per 6. Et Multiplicatio per 60, promovet lineam separatricem uno loco versus dextram, & insuper multiplicat per 6. Quæ regula notatu digna est.

Si verò plures ſint ſpecies Sexageſimales annexæ Integris, puta $127^{\circ}\ 32'\ 00''\ 09'''\ 45''''$: hoc uteris compendio. Sub Integris 127 ſtatue ſpecies Sexageſimales deſcenſu obliquo: Tum facto initio ad infimam, ſingulas divide continuè per 6: Et quotos ſupraſcriptos ordini proximo ſuperiori adjunges, donec ad Integros perveneris.

127(5333784722 × 6
′32(0027083333
″00(1625
‴09(75
6) ⁗45

Et contra, ſi partes Decimales dentur, puta 127(5333784722: multiplicabis ipſas continuè per 6; & factos ſubtus ſcribes, amputato in ſingulis ordinibus uno loco versùs dextram; ut deſcenſus obliquus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus, puta Grad: 236(4276, convertuntur in partes Decimales diei; dividendo per 360, hoc eſt 6×60. Et contra, partes Decimales Diei puta 0(6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360. hoc eſt 60×6. Intuere diligenter exemplum.

{ 6) 236(4276
{ 60) 39(4046 ×6 }
0(6567433: ×60 }

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad: 236(4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc eſt, 3×5.

{ 3) 236(4276
{ 5) 78(8092 ×3 }
15(76184 ×5 }

Et

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15 76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc eſt, 5×3.

Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho: 15 76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc eſt, 4×6.
Et contra partes Decimales Diei, puta 0 6567433+, convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc eſt, 6×4.

4) 15 76184
6) 3 94046×4
0 6567433:×6

Summa collecta, puta 191374, convertitur in expanſam, dividendo continuè per 60, & contrà ſumma eadem expanſa, 53 09 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic eſt, quod ſi ſumma collecta ſit unitatum, ſcil: 191374°; expanſa erit 53'' 09' 34°, hoc eſt 53 Sexagenæ ſecundæ, 9 Sexag: 1æ, & 34 unitates. Si verò ſumma collecta ſit ſexageſimarum ſecundarum, ſcil: 191374''; expanſa erit 53° 09' 34''.

191374
60) 3189 3×60
53 0

19. Illa quidem proportio, rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica, eſt autem alia proportio Arithmetica, quæ eſt æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem eſt differentia tertii & quarti, quæ eſt primi & ſecundi. Ut 7.4:12. 9 vel 7.7-3: 12. 12-3. Arithmeticè proportionales ſunt.

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè proportionalibus, ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum $7 + 12 - 3 = 7 - 3 + 12$.

21. Et ſi è tribus numeris datis ſecundus addatur tertio, & primus tollatur è ſumma: reliquus erit quartus Arithmeticè proportionalis. Ut ſi dentur 7, 4, & 12: erit $12 + 4 - 7 = 9$, qui quartus eſt quæſitus.

22. Eſt etiam proportio Arithmetica continua, ſive Progreſſio, quando omnes termini à primo eâdem continuè exſurgunt differentia: Ut 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c. Differentia communis omnium eſt 3. Nam in hâc ſerie, primus (& quaſi radix) eſt 4: ſecundus conſtat ex primo & differentiâ unâ: Tertius conſtat ex primo & differentiis duabus: Et generaliter quilibet terminus conſtat ex primo & ex ſummâ differentiarum, quarum numerus uno minor eſt quam numerus terminorum: Exempli gratia, terminus decimus tertius conflabitur ex primo & differentiis duodecim, quarum ſumma eſt 36. Eſt igitur $4 + 36$, hoc eſt 40, terminus decimus tertius.

23. Si in Progreſſione Arithmetica, primus terminus addatur ultimo, & ſumma ducatur in numerum terminorum: factus erit duplicata ſumma totius Progreſſionis: Nempe $40 + 4$ in $13 = 572$, quæ ſumma eſt terminorum duplicata.

$\alpha + \omega = 2Z$ T.num:ter

24. Si ſupra ſeriem terminorum in Progreſſione Geometrica, ſtatuatur pro Indicibus, ſeries terminorum qualiumcunque Progreſſionis Arithmeticæ: quibuſlibet quatuor numeris in Arithmetica proportione reſpondebunt quatuor numeri Geometricè proportionales.

Indices,

Indices, 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20:
Termini, 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645. 10935.

Quia $10+16-6=20$; Erit $\frac{45 \times 1215}{5}=10935$.

Atque hinc patet inventio termini cujuſvis in Progreſſione Geometrica.

25. Eſt etiam tertia Proportio, Muſica dicta, Quando in quatuor numeris, eſt ut Primus ad Quartum: ſic differentia primi & ſecundi, ad differentiam Tertii & Quarti. Ut 5, 8, 12, 30, ſunt muſicè proportionales: quia 5. 30 :: 8-5. 30-12 :: 3. 18. Item in ſpeciebus A, M, N, E; Eſto A. E :: M − A. E − N. Quare AE − AN = ME − AE, Terminis hiſce rité ordinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M}=E$. & $\frac{EM}{2E-N}=A$.

In verbis ſic, Si rectangulum ſub primo & tertio dividatur per exceſſum primi duplicati ſupra ſecundum: quotus erit quartus in Muſica proportione. Quare oportet terminos ſic dari, ut primus duplicatus excedat ſecundum.

Cap. VII.

DE MAXIMA COMMUNI MENSURA: quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejuſdem rationis.

1. Maxima duorum numerorum communis menſura invenitur perpetua diviſione majoris per minorem, & diviſoris per reliquum. Nam diviſor ille qui primus dividuum ſuum metitur, abſq;

ullo reliquo, maxima erit utriusque numeri dati communis mensura. Ut numerorum 899 & 744 maxima mensura invenietur 31.

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 31 \quad 124 \quad 155 \\ 31)\,124)\,155)\,744)\,899(1(4(1(4 \\ \quad\;\; 124 \quad 124 \quad 620 \quad 744 \end{array}$$

2. Numerorum reductio ad minimos terminos ejusdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipsorum communem mensuram. Ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi sunt termini in eadem ratione, diviso utroque per 31 maximam utriusque mensuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Aq}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, divisio dissolvit.

3. Quare, Si maxima duorum numerorum communis mensura sit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter se: suntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

4. Si numerus, primus sit ad utrumque factorem, primus erit ad factum.

Hinc proportionis operatio fieri sæpenumero potest facilior, ut in exemplo.*

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ 3 & 2 & 5 & \\ 12. & 8 :: & 15. & 10. \end{array}$$

5. Memento autem diligenter, *Quotiescunque fractio aliqua, sive ratio, proponitur, ut ipsam primò ad minimos terminos reducas*, ut $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

* per contraction̄ vult. ad minim: termin: per max: c̄m̄ō mensur.

C A P.

Cap: 8

CAP. VIII.

De PARTIBUS: quæ etiam fractiones, sive numeri fracti, dicuntur.

1. VNitas (sive integrum unum quodque) concipi mente potest in quotcunque æquales partes divisibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero suo, quem unitas continet, sortiuntur: ut si unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur secundæ; si in tres, tertiæ: & sic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem divisam in totidem æquales partes; & dicitur Denominator. Superior verò ostendit quot ex partibus illis significantur; atque ideò dicitur Numerator. Ut 4 numerator / 5 denominator } & significant quatuor quintas partes, sive quatuor partes unius integri divisi quinquifariam.

3. *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas significata ad unitatem.* $4.5::\frac{4}{5}.1$. $R.S::\frac{R}{S}.1$. vid. c. 6 § 1 dividendo.

4. Et quia ratio quævis terminis innumeris similiter sese adinvicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: sequitur partes etiam easdem, non iisdem solummodò numeris, sed aliis infinitis, posse designari. Ut quincuncem significant non modo $\frac{5}{12}$, qui minimi sunt termini in eadem ratione

ratione, ſed etiam $\frac{10}{24}, \frac{20}{48}, \frac{25}{60}, \frac{45}{108}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5. Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales, & contra.

6. Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores: ſi æqualis, ſignificant unitatem: et ſi major, partes unitatem excedunt, eâdem ratione, quâ denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem: ut $\frac{31}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $C+\frac{SA}{R}$. Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{3}{3}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{28+3}{7}$, hoc eſt $\frac{31}{7}$. Item $C+\frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$

CAP. IX.

DE ADDITIONE ET Subductione Partium.

1. SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum: Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem, dividendo denominatores per maximam ipſorum communem menſuram; & multiplicando terminos per alternos quotos. Deinde in numeratoribus

tam numeratores quam denominatores

ribus partium inventarum ejusdem denominationis additio vel subductio instituenda est. Et summæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator subscribendus.

2 Et si integri partibus sint immixti, seorsim tamen sunt numerandi. Exempli gratia:
Ex $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ sunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus demptis è $6\frac{1}{18}$ restabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo

in mistis additio incipit a partibus. Subductio contra ab integris

67
39+28
13 — 7
— 2 — est
4) 16 12
4 3
48

57 — 8
19 — 1
3 — è 6 —
48 — 18
6) 8 — 3
144

è $5\frac{152}{144} = 6\frac{8}{144}$
— tolle
$3\frac{57}{144}$
manet
$2\frac{95}{144}$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, summa $\frac{A+ZB}{B}$ — $\frac{BE+DA}{B+D}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$, restat $\frac{CA - Bq}{BC}$ — C) CA CE
A — E
CAE

CAP.

Cap. X.

DE MVLTIPLICATIONE ET Divisione Partium.

1. MUltiplicatio comparat heterologos terminos (hoc eſt reducit ad minimos) & multiplicat homologos.

2. Diviſio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3. Et ſi integri partibus ſint immixti, reſolvendi ſunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$ in $\frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}}$ fit $\frac{5}{12}$ | $\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9}$ in $\frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}}$ fit $\frac{20}{27}$ | $\frac{5}{1}$ in $3\frac{\overset{13}{\cancel{1}}}{4}$ fit $\frac{65}{4}$ ($16\frac{1}{4}$

$\frac{A}{B}$ in B fit A | $\frac{A}{B}$ in Z fit $\frac{ZA}{B}$ | $\frac{A}{B}$ in $\frac{ZA}{C}$ fit $\frac{ZAq}{BC}$

Exempla diviſionis.

$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}}$) $\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{7}{\cancel{28}}}$ ($\frac{20}{21}$ | $\frac{8}{\underset{3}{\cancel{15}}}$) $7\frac{\overset{37}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{5}}}$ ($\frac{111}{8}$ ($13\frac{7}{8}$ | $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{4}$) $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1}$ ($\frac{12}{1}$

$\frac{D}{1}$) $\frac{Aq}{B}$ ($\frac{Aq}{DB}$ | $\frac{A}{D}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BCD}{A}$ | $\frac{A}{B}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{BqC}{A}$

$\frac{B}{A}$) $\frac{BC}{1}$ ($\frac{CA}{1}$ | $\frac{Ac}{C}$) $\frac{Bc}{D}$ ($\frac{BcC}{DAc}$

4. Quis

4. Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$. Nam 1. $\frac{2}{7}$::21.6. vel 7.2::21.6.

5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$. Nam $\frac{2}{7}$. 1::6.21. vel 2.7::6.21.

6. Apud antiquos Musicæ Scriptores, termini multiplicandi in rationum sive continuatione, sive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum: si rationes sint 3 ad 2, & 4 ad 3.



7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipsarum, ac si essent fractiones. Continuentur rationes 3 ad 2, & 4 ad 3: idem est ac si dicatur, multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientque $\frac{12}{6}$, quæ dupla est ratio. Quare ratio sesquialtera continuata cum ratione sesquitertiâ facit duplam: vel ut loquuntur Musici, ex diapente & diatessaron fit diapason.

8. Rationum imminutio fit per Divisionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda sit 4 ad 3: Idem est ac si jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$ restabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$ ratio sesquioctava: quæ mensura est Toni integri. Unde dicunt Musici quod differentia inter diapente & diatessaron est Tonus. Ut in hâc lineâ sive chordâ divisâ in duodecim partes.



CAP. XI.

Exempla aliquot faciliima, quibus quæ hactenus tradita ſunt familiaria redduntur: Et via ad Æquationem Analyticam ſternitur.

1. SCiendum primò eſt, quod in ſequentibus, tum brevitatis, tum phantaſiæ juvandæ gratia, paſſim ferè his verborum ſymbolis utor. A & E ſignificant duos numeros, ſive magnitudines; quorum A plerumque major eſt, E minor. Æ rectangulum ſub ipſis. Z eſt ſumma. X differentia. Zq ſummæ quadratum. Xq differentiæ quadratum. Z. ſumma quadratorum. X. differentia quadratorum Z ſumma cuborum. X differentia cuborum. A, M, E, ſunt tres continuè proportionales: A, M, N, E, quatuor. Q: C: QQ: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinq; puncta incluſis, ſignificant illiuſmodi poteſtates. √ denotat radicem ſive latus poteſtatis ſimplicis, ſi non intercedant duo puncta: Si vero poteſtas duobus utrinque punctis includatur, ſignificat latus ipſius univerſale: quod etiam aliter per literam b vel r deſcribi ſolet, ut √b latus eſt Binomii, & √r latus Reſidui ſive Apotomes. = nota eſt æqualitatis.

2. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major eſt A, minor E: quænam eſt ipſorum ſumma? quæ differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia? quæ ſummæ & differentiæ ipſorum ſumma? quæ ſum-

Cap: 4:

mæ & differentiæ ipsorum differentia? quod summæ & differentiæ ipsorum rectangulum? quod summæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum summæ & differentiæ summa? quæ quadratorum summæ & differentiæ differentia? quod quadratum rectanguli?

Z est A+E. X est A-E. Æ est AE.
Z=Aq+Eq. X=Aq-Eq.
Z+X=2A Z-X=2E.
½Z+½X=A. ½Z-½X=E.
ZX=Aq-Eq=X. Zq.X::Z.X. zz.zx::z.x
Zq=Aq+2AE+Eq=Z+2Æ. = Xq + 4Æ
Xq=Aq-2AE+Eq=Z-2Æ.
Zq+Xq=2Aq+2Eq=2Z.
Zq-Xq=4AE. ¼Zq-¼Xq=Æ. vel
Æq=AqEq. q½Z-q½X=Æ pag. 53.

3. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum summa est Z, & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

E=Z-A. X=2A-Z. Æ=ZA-Aq.
Z=Zq-2ZA+2Aq. X=2ZA-Zq.

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

A=Z-E. X=Z-2E. Æ=ZE-Eq.
Z=Zq-2ZE+2Eq. X=Zq-2ZE.

4. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum differentia est X, & major ex ipsis ponitur A: quisnam

nam est minor? quæ ipsorum summa? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$2XA - Xq = 2XE + Xq = X$

1 $E = A - X.$ 2 $Z = 2A - X.$ 3 $Æ = Aq - XA.$

4 $Z = 2Aq - 2XA + Xq. = 2Æ + Xq$ 5 $X = 2XA - Xq.$

Si vero minor ex ipsis ponatur E.

$A = E + X$ $Z = 2E + X.$ $Æ = Eq + XE.$

$Z = 2Eq + 2XE + Xq. = 2Æ + Xq.$ $X = 2XE + Xq.$

$2Aq - 2XA = Eq + 2XE + 2Æ.$

5. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia.

$E = \frac{SA.}{R}$ $Z = \frac{RA + SA.}{R}$ $X = \frac{RA - SA.}{R}$

$Æ = \frac{SAq.}{R}$ $Z = \frac{RqAq + SqAq.}{Rq}$ $X = \frac{RqAq - SqAq.}{Rq}$

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = \frac{RE.}{S}$ $Z = \frac{RE + SE.}{S}$ $X = \frac{RE - SE.}{S}$

$Æ = \frac{REq.}{S}$ $Z = \frac{RqEq + SqEq.}{Sq}$ $X = \frac{RqEq - SqEq.}{Sq}$

6. Sunt

6. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum rectangulum eſt Æ; & major ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt minor? quæ ipſorum ſumma? quæ ipſorum differentia? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{Æ.}{A} \quad Z = \frac{Aq + Æ.}{A} \quad X = \frac{Aq - Æ.}{A}$$

$$Z = \frac{Aqq + Æq.}{Aq} \quad X = \frac{Aqq - Æq.}{Aq}$$

Si vero minor ex ipſis ponatur E:

$$A = \frac{Æ.}{E} \quad Z = \frac{Æ + Eq.}{E} \quad X = \frac{Æ - Eq.}{E}$$

$$Z = \frac{Æq + Eqq.}{Eq} \quad X = \frac{Æq - Eqq.}{Eq}$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla ſumemus in ſumma & Differentia.

$$Z = A + E = 2A - X = 2E + X = \frac{Aq + Æ}{A} = \frac{Æ + Eq}{E} \text{ \&c.}$$

$$X = A - E = 2A - Z = Z - 2E = \frac{Aq - Æ}{A} = \frac{Æ - Eq}{E} \text{ \&c.}$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt inſtitui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diverſitates.

Cap. XII.

DE GENESI, ET ANALYSI POTESTATUM.

1. QUia omnia resolvuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur: primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt à radice aliquoties in se multiplicatâ. Nam latus in se ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum: Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana [4]: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam [5]: Et sic ulteriùs progrediēdo fiunt potestates sextana [6], septimana [7], octavana [8], nonana [9], decumana [10], & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

2. Quare potestatum à radice singulari, quæ unica figura, sive nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

TA-

TABULA PRIOR POTESTATUM A RADICE SINGULARI.

L N	[2] q	[3] c	[4] qq	[5] qc	[6] cc	[7] qqc	[8] qcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

3. Quæ verò à radice binarum notarum exſurgunt, hunc habent ortus ſui modum.

Geneſis poteſtatum à radice binomia.

$$
\begin{array}{l}
A+E \\
A+E \\
\hline
Aq+AE \\
\quad +AE+Eq \\
\hline
Aq+2AE+Eq. \quad \text{Quadratum} \\
\quad A+E \\
\hline
Ac+2AqE+AEq \\
\quad +AqE+2AEq+Ec \\
\hline
Ac+3AqE+3AEq+Ec. \quad \text{Cubus} \\
\quad A+E \\
\hline
Aqq+3AcE+3AqEq+AEc \\
\quad +AcE+3AqEq+3AEc+Eqq \\
\hline
Aqq+4AcE+6AqEq+4AEc+Eqq. \quad \text{Quadrato-quadrat.} \\
\quad A+E \quad \&c.
\end{array}
$$

4. Atque hoc artificio conficietur tabula poteſtatum aſcendentium in ſcala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

A E

Latus sive numerus.

	[2]	[3]	[4] line: cub.	[5[quadra: cub:	[6] cub: cub:	[7]	[8]	[9]	[10]
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc	Accc	Aqqcc
	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqccE	10AcccE
	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45AqccEq
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120AqqcEc
			Eqq	5AEqq	15AqEqq	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	210AccEqq
				Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcEqc
					Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqEcc
						Eqqc	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEqqc
							Eqcc	9AEqcc	45AqEqcc
								Ecce	10AEccc
E									Eqqcc

5. Quælibet ſpecies intermedia cujuſque ordinis componitur ex duabus ſpeciebus ordinis præcedentis utrinque proximis: nempe A poteſtate ſuperioris ſpeciei, & E poteſtate inferioris. Numerus etiam affigendus ex utroque numero iiſdem affixo, aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6. In hâc tabulâ duæ extremæ poteſtates ſingulorum generum ſunt diagonales: & ſpecies intermediæ ſunt complementa: quibus affixæ ſunt *unciæ*, oſtendentes numerum complementorum in conſtitutione cujuſque poteſtatis ſumendorum. Complementa autem omnia, cum E poteſtate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7. Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum conſtat ex diagonalibus quadratis utriuſq; notæ, & duplice rectangulo ſub ipſis notis. Cubus autem conſtat ex cubis diagonalibus & triplice ſolido ſub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item ſolido ſub majore notâ & quadrato minoris. Quod ſimiliter de reliquis quoque poteſtatibus eſt efferendum.

8. Oſtendit inſuper plena hæc myſteriis pulcherrimis tabella, in numeroſa poteſtate, ſedes tum poteſtatum ſingularium ſive diagonalium, tum cujuſque ſpeciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica eſt ſpecies, quadratorum ſedes unicum interponent pro complementis locum. Et cùm inter binos cubos duæ ſunt complementorum ſpecies, cuborum ſedes binos interponent locos complementis ſuis ordine diſtribuendos.

Cap. XIII.

His itaque præmissis ad GENESIN Potestatum accedamus.

1. PRoponatur Genesis quadrati à latere 57. major igitur nota A est 5, minor E est 7. Scribantur 5 & 7 intermisso unius gradus spatio: & linea sub ipsis ducatur. Sub 5 statuatur quadratum suum 25: & sub 7 suum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendum loco intermedio. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæsito.

5	7		
25		Aq	
7	0	2AE	gnomon
	49	Eq	
32	49		

2. Proponatur iterum Genesis cubi à latere 57 scribantur 5 & 7 intermisso duorum graduum spatio: & linea sub ipsis ducatur. sub 5 statuatur cubus suus 125: & sub 7 suus 343. tum quadratum à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum solidum majus 525, ponendum loco priore intermedio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum solidum minus 735, ponendum loco

5	7		
125	Ac		
52	5	3AqE	
7	35	3AEq	gnomon.
	343	Ec	
185	193		

loco intermedio ſecundo. addantur omnia ſuis quæque locis: ſumma erit 185193 pro cubo lateris 57 quæſito.

3. Si latus propoſitum conſtet pluribus figuris, ut 57209: Primò poteſtas duarum primarum figurarum 57 quærenda eſt. Deinde ſumptis 57 pro A, & figura 2 ſequente pro E: quæratur poteſtas ipſius eodem, qui ante oſtenſus eſt tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris ſingulatim eſt faciendum.

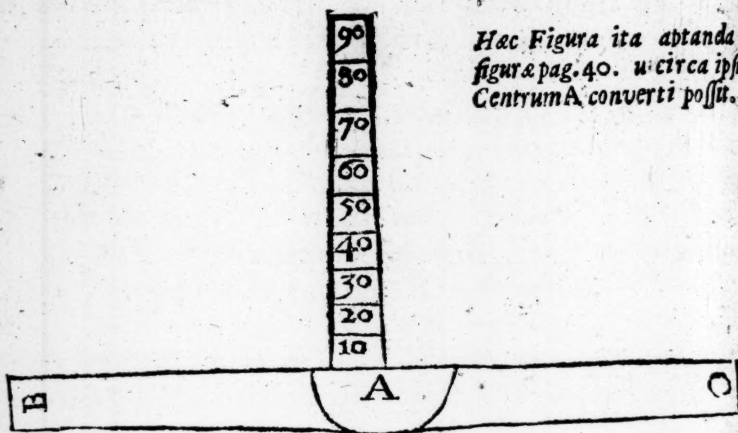
5	7	2	0	9			Radix.
25		Aq					
7	0	2Æ					gnomon.
	49	Eq					
32	49		Aq				
	22	8	2Æ				gnomon.
		4	Eq				
32	71	84	00		Aq		
	1	02	96	0	2Æ		gnomon.
				81	Eq		
32	72	86	96	81			Quadrat.

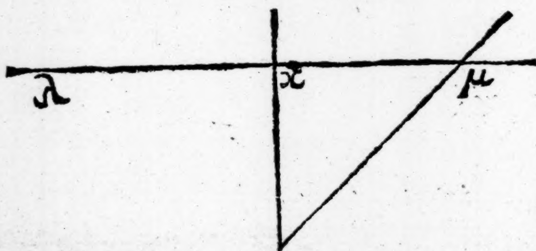
æ-
57

ut
um
ura
m,
in

5 7

Hæc Figura ita aptanda est figuræ pag. 40. ut circa ipsum Centrum A converti possit.





Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ CC, prout dirigitur Cap. IX. Sect. 2.

5	7	2	0	9		Radix.
125		Ac				
52	5	3AqE				Gnomon.
7	35	3AEq				
	343	Ec				
185	193		Ac			
1	949	4	3AqE			Gnomon.
	6	84	3AEq			
		8	Ec			
187	149	248	000		Ac	
	88	339	6800	0	3AqE	Gnomon.
		13	899	60	3AEq	
				729	Ec	
187	237	601	580	329		Cubus.

4. Ex his, quæ jam declarata ſunt, non difficile erit reliquas etiam omnes ſuperiorum generum poteſtates progignere: modò in ipſarum geniturâ inferiorum omnium ad ipſas adſcendentium poteſtatum geneſis inſtituatur: ſicut in cubi geneſi jam factum vides.

C A P.

CAP. XIV.

Sequitur ANALYSIS: quæ est eductio radicis ex numerosa potestate data.

1. ANalysis, postquam sedes potestatum, pro suo quasque juxta tabulam genere, punctis, posito primo puncto sub loco unitatum, distinxerit: primò ex figuris primi à sinistra puncti potestatem diagonalem comprehensam tollit: latusque ipsius, quod A vocetur, in margine scribit. tum numero reliquo, ad proximum usque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per divisorem ex latere A invento legitimè conflatum, diviso, secundum latus E quærit & in margine scribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo subtrahit. Et sic integra duorum primorum singularium laterum, in duobus primis punctis contenta, potestate dempta, restabit ad tertium usque punctum gnomon pro tertio latere similiter eruendo.

Analysis

Analysis quadrati.

```
       1|           |
   7 2 3 0 2
 3 2 7 2 8 6 9 6 8 1   (57209
 28    | Aq         |            punctatio
  10   | 2 A        Divisor.
  70   | 2AE }
   49  |   Eq }
 7 49  |            Gnomon.
    1 1| 4     2A Divisor.
    2 2| 8        | 2AE }
       |  4       |   Eq }
   22  | 8 4      | Gnomon.
     1 | 144      | 21 Divisor.
       | 1 1 4 4 0   2A Divis:
     1 | 0 2 9 6 0       2AE }
       |        8 1       Eq }
     1 | 0 2 9 6 8 1  Gnomon.
```

Analysis

Analyſis Cubi.

```
    2|088
   62|044  333
  187|237  601   580   320  (57209
  125|     Ac
    7|5    3Aq }
     |15   3A  }
    7|65   diviſor
     |     3AqE  }
  525|5    3AEq  }
    7|35     Ec  }
     |343
   60|193   gno- mon
     |          3Aq
     |9747      3A
     |  17 1
     |9764 1        divi- ſor
     |               3AqE
   1 |9494           3AEq
     |   684           Ec
     |       8
     |        248    gno- mon
    1|956                  3Aq }
     |   98  155   2       3A  }
     |        17  16
     |   98  172  36       diviſor
     |    9  815  520   0  3Aq
     |            171  60  3A
     |    9  815  691  60  diviſor
     |   88  339  680   0  3AqE }
     |        13  899  60  3AEq }
     |                729  Ec   }
     |   88  333  580  320  gnomon.
```

```
   5 7| 2| 0
 25|
  7|0
   |49
 32|49
   |22|8
   |   4
 32|71|84
```

2. Si

2. Si numerus propoſitus non ſit verus ſui generis figuratus, ſed peracta Analyſi aliquid reſtet: punctationes circulorum pro ſuo genere, quot opus erit, ſtatuendæ ſunt: & continuanda Analyſis poſt lineam ſeparatricem.

3. Ex his etiam quæ declarata ſunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex ſuperioribus poteſtatibus omnibus educere.

Cap. XV.
DE LATERIBUS SURDIS.

1. SI quotlibet numeri ſint continuè proportionales: Erit ut primus ad ultimum, ſic poteſtas primi æquimultiplicata numero terminorum minus uno, ad poteſtatem ſimilem ſecundi. Sunto quatuor ∺ A, M, N, E

Quia { A.M::A.M / M.N::A.M / N.E::A.M } Erit per Multiplicationem A.E::Ac.Mc.

2. Numeri plani vel ſolidi ſimiles ſunt, quorum latera homologa ſunt proportionalia.

3. Numeri plani ſimiles ſunt in duplicatâ ratione (hoc eſt, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani ſimiles, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri ſolidi ſimiles ſunt in triplicatâ ratione (hoc eſt, ut Cubi) homologorum laterum. Sunt igitur numeri ſolidi ſimiles, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4. Et

4. Et generaliter omnes figurati similes plurium dimensionum, sunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicatâ numero dimensionum, ex quibus componuntur. Dimensiones sunto quatuor, nempe A B C D unius, & E F G H alterius, in ratione R ad S.

Quia { A. E :: R.S
B. F :: R.S
C. G :: R.S
D. H :: R.S } Erit per multiplicationem ABCD. EFGH :: Rqq. Sqq.

5. Si numerus non sit verus sui generis figuratus, latus ejus dicitur surdum. & sic notatur, √q6, √c4, √qq20, √qc13: hoc est latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6. Latera surda commensurabilia sunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti, fiunt veri sui generis figurati: suntque idcirco ut numerus ad numerum, ut √q12 & √q147 reducta ad minimos terminos per √q3 maximam utriusque communem mensuram, fiunt √q4 & √q49, hoc est 2 & 7: quare cum √q12 & √q147 sint ut 2 ad 7, erunt commensurabilia. Sic √c40 & √c1715 sunt ut 2 ad 7, quoniam divisa per maximam suam communem mensuram √c5, fiunt √c8 & √c343; ideoque commensurabilia.

7. Adduntur autem, atque subtrahuntur, latera surda commensurabilia, si summæ, vel differentiæ, numerorum ipsis similium inventorum homogenea

potestas

potestas ducatur in communem ipsorum mensuram. Ut $\sqrt{q}147 + \sqrt{q}12$ est $\sqrt{q}243$; hoc est latus quadrati à $7 + 2$ (nempe 81) ductum in $\sqrt{q}3$ maximam ipsorum communem mensuram. Et $\sqrt{q}147 - \sqrt{q}12$ est $\sqrt{q}75$; hoc est latus quadrati à $7 - 2$ (nempe 25) ductum etiam in $\sqrt{q}3$.

Item $\sqrt{c}1715 + \sqrt{c}40$ est $\sqrt{c}3645$, hoc est latus cubi $7 + 2$ (nempe 729) ductum in $\sqrt{c}5$ maximam ipsorum communem mensuram. Et $\sqrt{c}1715 - \sqrt{c}40$ est $\sqrt{c}625$, hoc est latus cubi à $7 - 2$ ductum etiam in $\sqrt{c}5$.

Additionis & subductionis operatio talis est.

$$\sqrt{q}3)\ \sqrt{q}147\ (\sqrt{q}49.\ 7 \qquad \sqrt{c}5)\ \sqrt{c}1715\ (\sqrt{c}343.\ 7$$
$$\sqrt{q}12\ (\sqrt{q}4.\ 2. \qquad \sqrt{c}40\ (\sqrt{c}8.\ 2$$
$$\sqrt{q}243 \quad \sqrt{q}81.\ 9 \text{ summa } \sqrt{c}3645 \quad \sqrt{c}729.\ 9$$
$$\sqrt{q}75 \quad \sqrt{q}25.\ 5 \text{ differ. } \sqrt{c}625 \quad \sqrt{c}125.\ 5$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}$$
vel
$$\sqrt{\tfrac{48}{4}} + \sqrt{\tfrac{27}{4}}$$
$$\sqrt{3})\ \sqrt{48}\ (\sqrt{16}.\ 4$$
$$\sqrt{27}\ (\sqrt{9}.\ 3$$
$$\sqrt{\tfrac{147}{4}} \quad \sqrt{49}.\ 7$$
$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad \sqrt{1}.\ 1$$

$$\sqrt{\tfrac{245}{12}} + \sqrt{\tfrac{5}{12}}$$
$$\sqrt{5})\ \sqrt{245}\ (\sqrt{49}.\ 7$$
$$\sqrt{5}\ (\sqrt{1}.\ 1$$
$$\sqrt{\tfrac{320}{12}} \quad \sqrt{64}.\ 8$$
$$\sqrt{\tfrac{180}{12}} \quad \sqrt{36}.\ 6$$

8. Latera verô surda incommensurabilia, atque heterogenea, adduntur, vel subtrahuntur, signis + vel − ut $\sqrt{q}7 + \sqrt{q}4$. & $\sqrt{c}10 - \sqrt{c}5$.

9. Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit numerus

ejusdem

ejuſdem generis figuratus, cujus latus æquale eſt facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et ſi numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejuſdem generis figuratus, cujus latus æquale eſt quoto lateris Diuidendi ad Diviſoris latus applicati. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 eſt 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus eſt 7×3. Item $\sqrt{q}\,\frac{AqEq}{Bq}$ eſt $\frac{AB}{B}$.

10. Quare laterum ſurdorum homogeneorum multiplicatio, & diviſio, procreat latus etiam ſurdum homogeneum: ut $\sqrt{q}7$ in $\sqrt{q}3$ eſt $\sqrt{q}21$. Et $\sqrt{q}7)\ \sqrt{q}21\ (\sqrt{q}3$: vel $\sqrt{q}\frac{21}{7}$ eſt $\sqrt{q}3$. Item $\sqrt{q}A$ in $\sqrt{q}E$ eſt $\sqrt{q}AE$. Et $\sqrt{q}A)\ \sqrt{q}AE\ (\sqrt{q}E$: vel $\sqrt{q}\,\frac{AE}{A}$ eſt $\sqrt{q}E$.

11. Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, niſi prius ad idem genus reducuntur, quod fit dividendo indices utriuſque poteſtatis propoſitæ per maximam ipſorum communem menſuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipſas poteſtates in ſpecies alternis quotis cognomines. Ut ſi ad multiplicandum vel dividendum, proponatur $\sqrt{qq}10$ & $\sqrt{cc}7$. Primò reducuntur ad $\sqrt{cccc}\,1000$, & $\sqrt{cccc}49$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel diviſio. Sic etiam $\sqrt{qq}A$, & $\sqrt{cc}Bq$ reducuntur ad $\sqrt{cccc}Ac$, & $\sqrt{cccc}Bqq$: uti planiùs apparebit per praxim, quæ hic apponitur.

$\sqrt{[12]}1000$ $\sqrt{[12]}49$ $\sqrt{[12]}Ac$ $\sqrt{[12]}Bqq$
[2]) $\sqrt{[4]}10$ $\sqrt{[6]}7$ [2]) $\sqrt{[4]}A$ $\sqrt{[6]}Bq$
[2] [3] [2] [3]

Rursus si $\sqrt{c32}$ duplicandum sit, vel multiplicandum per 2: pro 2 sumatur $\sqrt{c8}$: & per ipsum multiplicetur $\sqrt{c32}$; fietque $\sqrt{c256}$, æquivalens bis $\sqrt{c32}$.

Item si dimidiandum sit $\sqrt{c32}$, vel dividendum per 2: pro 2 sumatur $\sqrt{c8}$: & per ipsum dividatur $\sqrt{c32}$; orieturque $\sqrt{c3\frac{2}{8}}$; hoc est $\sqrt{c4}$, æquivalens $\frac{1}{2}\sqrt{c32}$.

~~Sic etiam $\frac{22}{7}\sqrt{qAq}$, fiet $\sqrt{q\,4\frac{84}{49}Aq}$, hoc est $\frac{22}{7}A$.~~

12. Si latus potestatis multiplicandum sit secundùm exigentiam suæ speciei: deleatur nota speciei lateralis: ut Q: $\sqrt{q64}$, vel C: $\sqrt{c64}$, est 64.

13. Et si latus potestatis, cujus index est numerus compositus, multiplicandum sit secundùm exigentiam alterutrius speciei componentis: latus alterius speciei numero speciali solùm præfigatur: ut Q: $\sqrt{cc64}$ est $\sqrt{c64}$ & C. $\sqrt{cc64}$ est $\sqrt{q64}$. Nam $\sqrt{cc}$ est $\sqrt{[2 \times 3]}$

14. Si magnitudo plurium nominum, ducatur in seipsam, cum uno ex suis signis mutato; expurgabitur unum nomen. Ut $5+\sqrt{5}+\sqrt{2}$ in $3+\sqrt{5}-\sqrt{2}$, fiet $12+\sqrt{180}$.

$3+\sqrt{5}+\sqrt{2}$
$3+\sqrt{5}-\sqrt{2}$
$9+\sqrt{45}+\sqrt{18}+\sqrt{10}$
$5+\sqrt{45}-\sqrt{18}-\sqrt{10}$
-2
$12+\sqrt{180}$

Cap. XVI.

DE ÆQUATIONE. & De quæstionibus per Æquationem solvendis.

1. QUotiescunque problema aliquod, sive quæstio, proponitur: Puta præstitum esse quod postulatur: aptâque adhibita ratiocinatione, pro quæsita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis consonantes: quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoscantur.

2. Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæsitæ, secundum conditionem quæstioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, subtrahendo, multiplicando, & dividendo donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel suæ, ad quam ascendet, potestati æquale.

3. Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipsius ita sunt ordinandi, ut quæ in data habentur mensura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulæ quinque sequentes commonstrabunt.

4. Primò si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut, omisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut $A - C = \frac{Aq+Bq}{D} + B + C$: Erit $DA\text{-}DC = Aq+Bq+DB+DC$.

5. Secundò, si quæ in data habentur mensura, immisceantur

miſceantur cum quæſitis: *fiat tranſpoſitio magnitudinum ex una parte in aliam ſub contrario ſigno.* Ut $DA-DC = Aq+Bq+DB+DC$: Et tranſpoſitis DC & Aq, erit $DA-Aq = 2DC+DB+Bq$. Quæ etiam regula in omni tranſpoſitione ſervanda eſt.

6. Tertiò, ſi ſpecies altiſſima quæſitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam; fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis applicatio. Ut $BAq+BqA = Zc$, erit $Aq+BA = \frac{Zc}{B}$.

7. quarto, ſi contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæſitæ: fiat omnium, per applicationem ad minimam ſpeciem, ſecundum ordinem tabellæ, communis depreſſio. Ut $Aqq+BAc = ZqAq$, erit $Aq+BA = Zq$, expuncto in ſingulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet propoſita poterit deprimi, ſive reduci ad minores ſpecies; Si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis applicatio. Ut $Ac+XAq = Nc$, diviſa per A, fiet $Aq+XA = \frac{Nc}{A}$: at diviſa per Aq, fiet $A+X = \frac{Nc}{Aq}$ Quæ quidem operatio in numeroſa affectarum æquationum reſolutione uſus erit non contemnendi: quia latus quæſitum faciliùs æſtimatur in minoribus poteſtatibus, quam in majoribus.

8. Quintò, ſi magnitudo aliqua ſit latus ſurdum: æquatio in ipſis poteſtatibus eſt inſtituenda. Ut $\sqrt{q}BA + B = C$: vel per tranſpoſitionem $\sqrt{q}BA = C-B$. Ideoque ipſorum quadrata, $BA = Cq-2CB+Bq$: vel $A = \frac{Cq-2CB+Bq}{B}$.

Item

Item $\sqrt{u}$: BA+CA: -D = B. Vel $\sqrt{u}$: BA+CA: = D + B. Ideoque & ipſorum quadrata BA+CA = Bq+2BD+Dq: vel A = $\frac{Bq + 2BD + Dq.}{B + C}$ Denique $\sqrt{q}\frac{A}{3} = \sqrt{c}2A$: vel per 11 c 15, $\sqrt{cc}\frac{Ac}{27} = \sqrt{cc}\frac{4Aq.}{27}$ quare Ac = 108Aq. Et A = 108.

9. Æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, conſtitutio liquebit ex ſect: 2, 3, 4, capitis 11: Nam quia

Z — A = E: ducatur utraque pars in A.
Z — E = A: ducatur utraque pars in E.
A — X = E: ducatur utraque pars in A.
E + X = A: ducatur utraque pars in E.

Et ſimiliter fiat in Z … X., &c.

Atque hac multiplicatione hujuſmodi orientur æquationes.

Æ magnitudo absoluta: ZA coefficiens: Aq media species: √ Altissima species: in ordine scalæ ascendentes.

ZA-Aq = Æ
ZAq-Aqq = Æq
ZAc-Acc = Æc
&c I Reg:

ZE-Eq = Æ
ZEq-Eqq = Æq
ZEc-Ecc = Æc
&c

Aq-XA = Æ
Aqq-XAq = Æq
Acc-XAc = Æc
&c II Reg:

Eq+XE = Æ
Eqq+XEq = Æq
Ecc+XEc = Æc
&c

Quotieſcunque igitur proponitur Æquatio conſtans ex tribus ſpeciebus æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentibus: Cogitabis magnitudinem abſolutam

tam datam, esse rectangulum sub duabus magnitudinibus quæsitis, sive latera sint, sive quadrata, sive Cubi, &c: qualis scil: est potestas mediæ speciei. In media autem specie, si altissima species sit negata, coëfficientem esse summam magnitudinum quæsitarum; Et de utraque (A & E) exponi. At si altissima species sit affirmata, coëfficientem esse magnitudinum quæsitarum differentiam; ipsam autem speciem exponi de majore, negatam; vel de minore, affirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum summa & rectangulo, datur earundem differentia: vel data differentia & rectangulo, datur summa. Nam per 2 Cap: XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q{:}\ \tfrac{1}{2}Z{:}-Æ = Q{:}\ \tfrac{1}{2}X \\ Q{:}\ \tfrac{1}{2}X{:}+Æ = Q{:}\ \tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\} \text{quare} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{u{:}\ \tfrac{1}{4}Zq - Æ{:}} = \tfrac{1}{2}X. \\ \sqrt{u{:}\ \tfrac{1}{4}Xq + Æ{:}} = \tfrac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Denique datis binarum magnitudinum $\frac{1}{2}Z$ & $\frac{1}{2}X$, dantur ipsæ magnitudines; hisce duabus Regulis.

$$\text{I Reg. } \tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{u{:}\ \tfrac{1}{4}Zq - Æ{:}}\ (\tfrac{1}{2}X) = \begin{array}{c} A. \\ E. \end{array}$$

$$\text{II Reg. } \sqrt{u{:}\ \tfrac{1}{4}Xq + Æ{:}}\ (\tfrac{1}{2}Z) \pm \tfrac{1}{2}X = \begin{array}{c} A. \\ E. \end{array}$$

Atque hæ duæ sunt regulæ pro solutione Æquationis cujusque: in qua sunt tres species, æqualiter in ordine scalæ ascendentes.

10. GENESIS sex Binomiorum ex lateribus suis surdis. Regula est, $Z + 2Æ = Zq$.
In Apotomis verò, $Z - 2Æ = Xq$.

Exempl: I. Quadretur Binomium $\overset{A}{4} + \overset{E}{\sqrt{11}}$. Hîc Z est 16+11, hoc est 27. Et Æ est $\sqrt{16} \times \sqrt{11}$, hoc est $\sqrt{176}$: cujus duplum est $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27 + \sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I.

Exempl:

Exempl: II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{}qq\,12 + \sqrt{}qq\,\frac{27}{4}$. Hîc Z est $\sqrt{}12 + \sqrt{}\frac{27}{4}$, vel $\sqrt{}\frac{48}{4} + \sqrt{}\frac{27}{4}$; hoc est $\sqrt{}\frac{147}{4}$, per 7, Cap: XV. Et Æ est $\sqrt{}qq\,12 \times \sqrt{}qq\,\frac{27}{4}$, vel $\sqrt{}qq\,3 \times \sqrt{}qq\,27$; hoc est, $\sqrt{}qq\,81$, scil: 3: cujus duplum est 6. Quadratum igitur erit $\sqrt{}\frac{147}{4} + 6$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl: III. Quadretur Bimediale posterius $\sqrt{}qq\,\frac{80}{3} + \sqrt{}qq\,15$. Hîc Z est $\sqrt{}\frac{80}{3} + \sqrt{}15$, vel $\sqrt{}\frac{80}{3} + \sqrt{}\frac{45}{3}$; hoc est $\sqrt{}\frac{245}{3}$, per 7, Cap. XV. Et Æ est $\sqrt{}qq\,\frac{80}{3} \times \sqrt{}qq\,15$, vel $\sqrt{}qq\,80 + \sqrt{}qq\,5$; hoc est $\sqrt{}qq\,400$, scil: $\sqrt{}20$: cujus duplum est $\sqrt{}80$. Quadratum igitur erit $\sqrt{}\frac{245}{3} + \sqrt{}80$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quæ constant ex radicibus Binomii & Residui connexis, ut $\sqrt{}b$: A+E: pl $\sqrt{}r$: A-E: perspicuum est Z esse 2A: & Æ esse $\sqrt{}$: Aq-Eq: quare

Exempl: IV. Quadretur Major, $\sqrt{}b$: $\frac{7}{2} + \sqrt{}\frac{29}{4}$: pl $\sqrt{}r$: $\frac{7}{2} - \sqrt{}\frac{29}{4}$. Hîc Z est $\frac{7}{2} + \frac{7}{2}$, hoc est, 7. & Æ est $\sqrt{}u$: $\frac{49}{4} - \frac{29}{4}$: hoc est, $\sqrt{}\frac{20}{4}$, scil: $\sqrt{}5$: cujus duplum est $\sqrt{}20$. Quadratum igitur erit $7 + \sqrt{}20$. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl: V. Quadretur Potens rationale cum mediali, $\sqrt{}b$: $\sqrt{}5 + 1$: pl $\sqrt{}r$: $\sqrt{}5 - 1$. Hîc Z est $\sqrt{}5 + \sqrt{}5$; hoc est, $\sqrt{}20$. Et Æ est $\sqrt{}$: 5-1: hoc est, $\sqrt{}4$, scil: 2: cujus duplum est 4. Quadratum igitur erit $\sqrt{}20 + 4$. Quod dicitur Binomium V.

Exempl: VI. Quadretur Potens duo medialia, $\sqrt{}b$: $\sqrt{}5 + \sqrt{}3$: pl $\sqrt{}r$: $\sqrt{}5 - \sqrt{}3$. Hîc Z est $\sqrt{}5 + \sqrt{}5$, hoc est, $\sqrt{}20$. Et Æ est $\sqrt{}$: 5-3: hoc est, $\sqrt{}2$: cujus duplum est $\sqrt{}8$. Quadratum igitur erit $\sqrt{}20 + \sqrt{}8$. Quod dicitur Binomium VI.

11. ANALYSIS. In Binomio igitur quadra- tico,

tico, majus nomen est Z: & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI, ordinatum est, $\frac{1}{4}$Zq-Æ$=\frac{1}{4}$Xq: scil: $\frac{1}{4}$Q: A+E:-Æ$=\frac{1}{4}$Q: A-E. Quare si pro A & E sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}$Q: Aq+Eq:-AqEq $=\frac{1}{4}$Q: Aq-Eq: hoc est, $\frac{1}{4}$Zq-Æq$=\frac{1}{4}$Xq, ex quo Theoremate pro Analysi Binomii deducitur hæc Regula.

A $\pm$ √: Aq-Eq: $=$ 2Aq / 2Eq

$\frac{1}{2}$Z $\pm$ √q: $\frac{1}{4}$Zq-Æq: ($\frac{1}{2}$X) $=$ Aq. / Eq.

Exempl: I. Quæratur latus Binomii I, 27+√704: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\frac{27}{2}$: & Æ est √$\frac{704}{4}$: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{729}{4}$-$\frac{704}{4}$; hoc est, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{5}{2}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Reg: $\frac{27}{2}+\frac{5}{2}=$ 16. 11. — 4. √11 } Latus igitur quæsitum $\frac{32}{2}=16$ $\frac{22}{2}=11$ est 4+√11. Et dicitur Binomium I.

Exempl: II. Quæratur latus Binomii II, √$\frac{147}{4}$+6: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est √$\frac{147}{16}$: Et Æ est 3. & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{147}{16}$-(9) $\frac{144}{16}$; hoc est $\frac{3}{16}$: cujus latus √$\frac{3}{16}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Reg: √$\frac{147}{16}$ $\pm$ √$\frac{3}{16}$ $=$ √12. √qq12. / √$\frac{27}{4}$. √qq$\frac{27}{4}$. } Latus igitur quæsitum est √qq12+√qq$\frac{27}{4}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl: III. Quæratur latus Binomii III, √$\frac{245}{3}$+√80: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est √$\frac{245}{12}$: & Æ est √20. & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{245}{12}$-(20) $\frac{240}{12}$; hoc est, $\frac{5}{12}$: cujus latus √$\frac{5}{12}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Regul: √$\frac{245}{12}$ $\pm$ √$\frac{5}{12}$ $=$ √$\frac{80}{3}$. √qq$\frac{80}{3}$ / √15. √qq15 } Latus igitur quæsitum est √qq$\frac{80}{3}$+√qq15. Et dicitur Bimediale posterius.

Exempl: IV. Quæratur latus Binomii IV, 7+√20: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\frac{7}{2}$: & Æ est √5: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq

est

Nam Zq - 4Æq = Xq
quare Aqq + Eqq - 2Æ = Xq
nom. majus minus

est $\frac{49}{4}$-(5) $\frac{29}{4}$; hoc est; $\frac{29}{4}$: cujus latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ est $\frac{1}{2}$X. At per

$$\text{Reg. } \frac{7}{2} \pm \sqrt{\tfrac{29}{4}} = \left.\begin{matrix} \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}\ \sqrt{b}{:}\ \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}} \\ \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}\ \sqrt{r}{:}\ \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}} \end{matrix}\right\}$$

Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}$: $\frac{7}{2}$ + $\sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}$: $\frac{7}{2}$ - $\sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major.

Exempl: V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20}+4$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$ $\sqrt{20}$ est $\sqrt{5}$: & Æ est 2 : & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est 5-4; hoc est 1, cujus latus 1 est $\frac{1}{2}$X.

$$\text{At per Reg: } \sqrt{5} \pm 1 = \left.\begin{matrix} \sqrt{5}+1\ .\sqrt{b}{:}\ \sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}-1\ .\sqrt{r}{:}\ \sqrt{5}-1 \end{matrix}\right\}$$

Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}$: $\sqrt{5}+1$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5}-1$, Et dicitur Potens rationale cum mediali.

Exempl: VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{20}+\sqrt{8}$: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\sqrt{5}$: & Æ est $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}$Zq -Æq est 5-2; hoc est 3: cujus latus $\sqrt{3}$ est $\frac{1}{2}$X. At per

$$\text{Regul: } \sqrt{5} \pm \sqrt{3} = \left.\begin{matrix} \sqrt{5}+3.\ \sqrt{b}{:}\ \sqrt{5}+\sqrt{3}. \\ \sqrt{5}-3.\ \sqrt{r}{:}\ \sqrt{5}-\sqrt{3}. \end{matrix}\right\}$$

Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}$: $\sqrt{5}+\sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12. Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Genesis se offert. Quia Zq=Xq+4AE, nempe Hq= Bq+Cq, per 47 e 1: Propositis binis quibuscunque lineis sive numeris A & E, trianguli rectanguli latera erunt, A+E, A-E, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A & E in Aq & Eq) Aq+Eq. Aq-Eq. 2AE, (scil: $\sqrt{4AqEq}$.) Ut si proponantur duo numeri 2 & 1 : latera erunt 3, 1, $\sqrt{8}$: nempe 2+1, 2-1, $\sqrt{4\times2\times1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe 4+1, 4-1, 2×1 bis.

13. Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C : & h, b, c: tertium ex ipsis fabricare: idque dupliciter,

$$\text{I. Quia } \left.\begin{matrix} Bq = Hq - Cq \\ \text{Et } bq = hq - cq \end{matrix}\right\} \text{Multiplicentur invicem;}$$

Eritque

Cap: 16.

Bb. Hh + Cc. mi: Hc + Ch

Eritque $Bqbq = Hqhq + Cqcq$ mi $Hqcq + Cqhq$.
At $Hqhq + Cqcq + 2HChc = Q: Hh + Cc$:
Et $Hqcq + Cqhq + 2HChc = Q. Hc + Ch$:

$2HChc - 2HChc = 0$

Subducatur unum quadratum ex altero: & erit,
$Bqbq = Q: Hh + Cc$: mi $Q: Hc + Ch$:
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,
$Bb. Hh + Cc. Hc + Ch$. Hæc Regula sit I.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi base, sumatur rectangulum sub basibus: Pro hypotenusa, rectangulum sub hypotenusis auctum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub hypotenusa primi & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & hypotenusa secundi.

IIº Quia $Hq = Bq + Cq$ Et $hq = bq + cq$ } Multiplicentur invicem

Eritque $Hqhq = Bqbq + Cqcq$ pl. $Bqcq + Cqbq$.
At $Bqbq + Cqcq - 2BCbc = Q: Bb - Cc$:
Et $Bqcq + Cqbq + 2BCbc = Q: Bc + Cb$:
Addantur hæc duo quadrata: & erit
$Hqhq = Q: Bb - Cc$: pl $Q: Bc + Cb$.
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,
$Hh. Bb - Cc. Bc + Cb$. Hæc Regula sit II.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi hypotenusa, sumatur rectangulum sub hypotenusis. Pro base, rectangulum sub basibus minutum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub base primi, & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & base secundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio triangulum producet bicompositum: secunda

ſecunda tricompoſitum: tertia quadricompoſitum: & ſic ulterius.

Exempl. Reg. I. Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.

B. H. C. trianguli ſimpli.
B. H. C

Bq. Hq+Cq. 2HC. triang. bicompoſit.
B. H. C.

Bc. Hc+HCq. 2HqC
2HCq. HqC+Cc.

* Bc. Hc+3HCq. 3HqC+Cc. tri compoſit.
B. H (A . C (E B (Aq - Eq)

Bqq. Hqq+3HqCq. 3HcC+HCc
Cqq+3HqCq. HcC+3HCc.

Bqq. Hqq+6HqCq+Cqq. 4HcC+4HCc.
B. H. C (quadricomp.
&c.

Exempl. Reg. II. Hh. Bb-Cc. Bc+Cb.

H. B. C. trianguli ſimpli.
H. B. C.

Hq. Bq-Cq. 2BC: triang. bicompoſit.
H. B. C

Hc. Bc-BCq. 2BqC
-2BCq. BqC-Cc

Hc. Bc-3BCq. 3BqC-Cc: tri-compoſit.
∴ H. B (A) . C (E)

Hqq. Bqq-3BqCq. 3BcC-BCc
Cqq-3BqCq. BcC-3BCc

Hqq. Bqq-6BqCq+Cqq. 4BcC -4BCc.
H. B. C (quadri comp.
&c.

CAP.

* Ɋ: Hc + 3HCq: — Ɋ: 3HqC + Cc: = Ɋ: Bc = C: Bq (Aq - Eq
∴ Ɋ: Bc - 3BCq: + Ɋ: 3BqC - Cc: = Ɋ: Hc = C: Hq (Aq + Eq

CAP. XVII.

Alia tabulæ posterioris in Cap. 12. inspectio, quoad Æquationes.

1. A Binomia radice A+E, poteſtatum ſpecies omnes ſunt affirmatæ. A Reſiduo verò poteſtatum ſpecies omnes ſunt alternatim negatæ, ut Q: A-E: eſt Aq--2AE+Eq. Et C: A-E: eſt Ac -3AqE+3AEq-Ec. Et QQ: A-E: eſt Aqq-4AcE+ 6AqEq-4AEc+Eqq. &c. Adeò ut ſi poteſtatis cujuſvis ſpecies alternatim ſumptæ, in duas ſummas aggregentur: harum ſummarum connexio cum ſigno radicis, erit radicis ipſius poteſtas. Atque hæc eſt Binomiorum, ac Reſiduorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque conſtitutio.

2. Quare nominum Binomii, vel Reſidui cujuſque differentia, eſt homogenea poteſtas differentiæ nominum radicis. ſcil: Ac+3AEq mi 3AqE+Ec, vel Ac+3AEq-3AqE-Ec, eſt C: A-E:

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Reſidui cujuſq; differentia, eſt homogenea poteſtas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. ſcil: Q: Ac+3AEq: mi Q: 3AqE+Ec eſt C: Aq-Eq.

Nam per exampl: Reg: I, in 14, Cap: XVI, ſi cogitetur A hypothenuſa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq-Eq quadratum baſis; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Hc+3HCq: mi Q: 3HqC+Cc: = C: Bq: = Q: Bc: ergo

4. At ſi ſpecies in nominibus aggregatæ, ipſæ eti-

am

am alternatim adfirmentur,& negentur: Quadratorum è nominibus ſumma, eſt homogenea poteſtas ſummæ quadratorum è nominibus radicis. Scil: Q: Ac-3AEq.pl Q: 3AqE-Ec: eſt C: Aq+Eq.

Nam per exempl: Reg. II, in 14, Cap. XVI, ſi cogitetur A baſis trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq+Eq quadratum hypotenuſæ; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Bc-3BCq: pl Q: 3BqC-Cc:=C: Hq:=Q: Hc. Ergo

5. Omnes cujuſque ordinis intermediæ ſpecies, ſunt etiam poteſtates mediorum inter A & E proportionalium. ſcil. inter Ac & Ec, ſunt duæ mediæ proportionales, AqE & AEq: qui etiam cubi ſunt ex M & N. Quare A, √cAqE, √cAEq, E, ſunt continuè proportionales: nempe A, M, N, E. Nam AqE=AMN=Mc: & AEq=MNE=Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E: ut ſi velis quinque medios proportionales, poteſtates erunt (6) ſive cc, quarum Index unitate excedit numerum quæſitorum mediorum: Eruntque A, √cc AqcE, √ccAqqEq, √ccAcEc, √cc Aq Eqq, √ccAEqc, E, ∺

6. Omnis media ſpecies in unoquoque genere, fit ex duabus nominum radicis poteſtatibus, quarum Indices ſimul, æquales ſunt Indici ejuſdem generis: mediæ autē ipſius ſpeciei ab extremis ſuis diſtantiæ, æquales erunt Indicibus alternarum facientium: & facientibus ſuis in communi angulo reſpondent. Scil: AqEc generis quadrato-cubici, fit ex Aq in Ec, quibus in communi angulo reſpondent. Eſtque ab Aqc tertia: & ab Eqc ſecunda.

Conſect.

Consect, Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ potestatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter potestates nominum extremas) construere. Ut in exemplo, si radicis Binomiæ A†√Æ quæratur Quadrato-Cubus : erit Aqc† 10 ÆAc† 5 ÆqA plus! 5 √ÆAqcc† 10√ÆcAqq† √Æqc: Quod Binomium est Quadrato-Cubic. √.Sem: x.√.

Aqc
Aqq 5√ÆAqcc
Ac 4 10ÆAc
Aq 3 6 10√ÆcAqq
A 2 3 4 5ÆqA
√Æ Æ √Æc Æq √Æqc

7. Si species aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media species collateralis, in ordine alternè sequente, atque eadem numero à suis extremis. Ut Ac×Æ, est AqqE, quæ prima est ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE×Æ, est Aqq Eq, quæ ab Acc secunda est, & ab Ecc quarta. Et similiter de reliquis.

8. Si species aliqua multiplicetur per A—E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas species ordinis sequentis utrinque proximas. Ut AcX= Aqq— AcE. AqEX=AcE— AqEq. AEqX=AqEq —AEc. EcX=AEc— Eqq. quare

Si omnes cujusvis ordinis species multiplicentur per X, producetur differentia duarum potestatum extremarum ordinis proximi superioris. Ut ex Ac† AqE†AEq†Ec, ductus in X, fiet Aqq-Eqq.

9. In ordinibus Indicum imparium (l,c,qc,&c.) summa duarum extremarum potestatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c) differentia earundem; fit ex A†E ducta in singulas species ordinis

nis minoris præcedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut $Ac+Ec$, fit ex $Aq-AE+Eq$, ductis in $A+E$. Item $Aqq-Eqq$, fit ex $Ac-AqE+AEq-Ec$, ductis in $A+E$.

10. Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipsis factæ erunt etiam contrariæ. Ut $Aq-2AE+Eq$ ductæ in $A-E$, fient $Ac-3AqE+3AEq-Ec$. At vero eædem ductæ in $-A+E$, fient $-Ac+3AqE-3AEq+Ec$.

11. Unciæ sive numeri speciebus præfixi, sunt figuræ numerariæ. Nam omnes sub A & E, sunt radices. Omnes sub Aq & Eq, sunt triangulares. Omnes sub Ac & Ec, sunt pyramidales. Omnes sub Aqq & Eqq, sunt triangulo-triangulares. Omnes sub Aqc & Eqc, sunt triangulo-pyramidales. Omnes sub Acc & Ecc, sunt pyramidi-pyramidales; &c.

12. Si radix tribus constet nominibus, A, E, I,

Quadratum	Aq, 2AE, Eq, 2EI, Iq, 2AI,	Cubus	Ac, Ec, Ic, 3AqE, 3AEq: 3AqI, 3AIq, 3EqI, 3EIq, 6AEI.

Et nota quòd si in aliqua specie, numerus laterum negatorum sit impar; species illa erit negata. Ut Q: $A+E-I$: $= Aq+2AE+Eq-2EI+Iq-2AI$. Et C: $A+E-I$: $= Ac+3AqE+3AEq+Ec-3EqI+3EIq-Ic-3AqI+3AIq-6AEI$.

CAP.

CAP. XVIII.

Penus Analytica.

1. EX primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud ſunt, quàm vel terminorum expoſitiones, vel ſimplices affectiones (quales ſunt illæ capitis XI, $\frac{1}{2}Z - E = \frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X + E = \frac{1}{2}Z$: & reliquæ ejuſmodi) innumeræ aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Diviſionem, Tranſpoſitionem, atque Interpretationem: ſumendo id quod alteri inventum eſt æquale, loco ejus cui æquatur. quæ quidem Analytica ſupellex eſt, non minùs pretioſa, quàm copioſa. Quarum ergo præcipuas aliquot, & maximè neceſſarias adſcribam: plures Analytices ſtudioſus pro ſuo exercitio excogitabit. Et ubicunque ſive in Arithmetica, ſive in Geometria, ſive in alia aliqua arte, inciderit in magnitudinem aliquam, cui altera æqualis eſſe intelligitur; æqualitatem illam quibuſcunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, diſcutiet, variabit, ut novum inde artis inſtrumentum inveniat: quod poſtea in penu ſervabit: & ubicunque poterit in uſum proferet, ad artis ſubſidium atque augmentum.

2.

2. $Q:1:=9Q:\frac{1}{3}$. &c. $C:1:=27\,C\frac{1}{3}:$ &c.

$Q:1:=\frac{1}{9}Q:3$. &c. $C:1:=\frac{1}{27}C:3:$&c.

$Q:1:=\frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}$. &c. $C:1:=\frac{27}{8}C:\frac{2}{3}:$&c.

$\frac{2}{5}Q:1:=\frac{2}{5}\times\frac{9}{4}Q:\frac{2}{3}:$ &c. $\frac{2}{5}C:1:=\frac{2}{5}\times\frac{27}{8}C:\frac{2}{3}:$&c.

$\frac{2}{3}Q:4:=\frac{2\times16}{3}Q:1$. &c. $\frac{2}{3}C:4:=\frac{2\times64}{3}C:1:$&c

3. Si linea bisecetur, & secùs; rectangulum sub segmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum bisegmenti atque intersegmenti: hoc est semisummæ atque semidifferentiæ segmentorum. 5 e 2. $AE=Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E:$ mi $Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E:$ Et hoc est, $AE=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq$.

4. Si linea bisecta augeatur; rectangulum sub tota aucta & augmento, æquatur differentię quadratorum bisegmenti aucti, atque bisegmenti. 6 e 2. $A+E$ in $E=Q:\frac{1}{2}A+E:$ mi $Q:\frac{1}{2}A$. Et $A+E$ in $A=Q:\frac{1}{2}E+A:$ mi $Q:\frac{1}{2}E$.

Datis igitur summa trium $\div$ $(Aq+AE+Eq)$ cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Sic

$\sqrt{u}:Aq+AE+Eq-\frac{3}{4}Aq:$ mi $\frac{1}{2}A=E$.

$\sqrt{u}:Aq+AE+Eq-\frac{3}{4}Eq:$ mi $\frac{1}{2}E=A$.

Nam $Q:\frac{1}{2}A+E:=\frac{1}{4}Aq+AE+Eq$.

Et $Q:\frac{1}{2}E+A:=Aq+AE+\frac{1}{4}Eq$.

5. Si linea secetur utcunque; summa quadratorum totius, & unius segmenti, æquatur aggregato quadrati alterius segmenti, & duplicis rectanguli sub tota & priore segmento, 7 e 2. $Zq+Aq=2ZA+Eq$. Et $Zq+Eq=2ZE+Aq$. Quare $2ZA+Eq-Aq=Zq=2ZE+Aq-Eq$. $(2\,AE=Z-Xq)$

6. Si linea utcunque secta, augeatur alterutro segmento; Quadruplex rectangulum sub secta, & segmento

mento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius segmenti. 8 e 2.

$Q{:}Z+E{:}-Aq=4ZE$. Et $Q{:}\ Z+A{:}-Eq=4ZA$.

7. Si linea bisecetur, & secus; summa quadratorum segmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ summæ quadratorum bisegmenti, & intersegmenti. 9 e 2. $Aq+Eq=2Q{:}\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}E{:}+2Q{:}\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}E$.

8. Si linea bisecta augeatur; summa quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ summæ quadratorum bisegmenti aucti, & bisegmenti. 10 e 2.

$Q{:}\ A+E{:}+Eq=2Q{:}\tfrac{1}{2}A+E{:}+2Q{:}\tfrac{1}{2}A$.

$Q{:}A+E{:}+Aq=2Q{:}\tfrac{1}{2}E+A{:}+2Q{:}\tfrac{1}{2}E$.

9. $Aq=ZA-AE=XA+AE=\tfrac{1}{2}ZA+\tfrac{1}{2}XA=Q{:}Z-E{:}=Q{:}E+X{:}=Z-Eq=Eq+X$.

Et $Eq=ZE-AE=AE-XE=\tfrac{1}{2}ZE-\tfrac{1}{2}XE=Q{:}Z-A{:}=Q{:}A-X{:}=Z-Aq=Aq-X$.

10. $Æ=\tfrac{1}{4}Zq-\tfrac{1}{4}Xq=ZA-Aq=ZE-Eq=Aq-XA=Eq+XE=\tfrac{1}{2}Zq-\tfrac{1}{2}Z=\tfrac{1}{2}Z-\tfrac{1}{2}Xq=\tfrac{1}{2}ZA-\tfrac{1}{2}XA=\tfrac{1}{2}ZE+\tfrac{1}{2}XE$.

11. $Z=Aq+Eq=Zq-2AE=2AE+Xq=ZE+XA=ZA-XE=2Q{:}\tfrac{1}{2}Z{:}+2Q{:}\tfrac{1}{2}Z-E{:}=Q{:}A-2N{:}+Q{:}2M-E{:}=\tfrac{1}{2}Zq+\tfrac{1}{2}Xq=2Q{:}\tfrac{1}{2}Z{:}+2Q{:}\tfrac{1}{2}X{:}$ Consectarium ex his duabus ultimis æquationibus: Si magnitudo constet ex quadratis binarum magnitudinum: ejus etiam duplum constabit ex duobus quadratis, summæ scil: & Differentiæ. Et dimidium ejus constabit ex duobus quadratis, semisummæ scil: & Semidifferentiæ.

Et X = Aq-Eq = ZX = 2ZA-Zq = Zq - 2ZE = 2XA - Xq = 2XE + Xq = ZA--ZE = XA+XE = Zq -2ZE = ZA+XE-2Æ = XA+2Æ--ZE = Q: A+2N: mi Q:2M+E.

12. $Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:} = Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E{:}+Æ.$ } Nam $\frac{1}{4}$ Zq
Et $Q{:}\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E{:} = Q{:}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E{:} -Æ.$ } $= \frac{1}{4}$Xq+Æ.

13. 2A+2E in A = 2Aq+2AE = Zq+X.
Et 2A-2E in A = 2Aq-2AE = X+Xq.
Et 2A+2E in E = 2AE+2Eq = Zq-X.
Et 2A-2E in E = 2AE-2Eq = X-Xq.

14. Xq = ZqXq = Z+2Æ in Z-2Æ = Zq-4AqEq.

15. ZÆ = AqE+AEq. Et XÆ = AqE-AEq.
Et ZÆ = AcE+AEc. Et XÆ = AcE-AEc.
Quare Z+3ZÆ = Zc. Et Z-3XÆ = Xc. ✗
Et ZZ = Z+ZÆ = Ac+AqE+AEq+Ec.
Et ZX = X-XÆ = Ac-AqE+AEq-Ec.
Et XZ = X+XÆ = Ac+AqE-AEq - Ec.
Et XX = Z-ZÆ = Ac-AqE-AEq+Ec.
Hinc ZZ+XX = 2Z. Et XZ+ZX = 2X.
Et ZZ-XX = 2ZÆ. Et XZ-ZX = 2XÆ.

16. Si in circulo sit 7.22::δ.π::113.355: erit

δ.π::2R.P:periph.	Et π.δ::$\frac{1}{2}$P. R: semidiam.
δ.π::Rq. Circul.	Et π.δ:: $\frac{1}{4}$Pq. Circul.
δ.π::2Rc. Cylind.	Et πq.δq::$\frac{1}{4}$Pc. Cylind.
δ.π::$\frac{4}{3}$Rc. Sphær.	Et πq.δq::$\frac{1}{6}$Pc. Sphær.
δ.π::$\frac{2}{3}$Rc. Con.	Et πq. δq:: $\frac{1}{12}$ Pc. Con.

R × $\frac{1}{2}$ P = Ar: Cir.

17. Ad hæc oportet futuurm Analystam Geometrica ista, tum theoremata, tum problemata non ignorare.

Theor: 1. Triangula sunt æqualia : Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenso

$\frac{2}{3}$ Cylind = Solid: Sphæra.
$\frac{1}{3}$ Cylind = Solid: Coni.

henſo; vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito, modo angulus reliquo lateri oppoſitus ſit homogeneus; vel duo anguli cum latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4,8, 26,e 1.

Theor: 2. Triangula plana ſunt ſimilia: Si vel ſint æquiangula; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4,5,6,7, e 6.

Theor: 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18, 19 e 1.

Theor: 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ: Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eâdem parte duobus rectis. Et contra. 27, 28,29,30, e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

Theor: 5. Trianguli tres anguli ſimul, æquantur duobus rectis: Et externus angulus duobus internis oppoſitis. 32 e 1.

Theor: 6. Si rectam in circulo inſcriptam, recta è centro biſecet: ad angulos rectos ipſam ſecat. 3 e 3.

Theor: 7. Perpendicularis ſuper finem diametri, circulum tangit. 16,18,19, e 3.

Theor. 8. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor: 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli ſuper æqualibus peripheriis, ſunt æquales. 21 e 3.

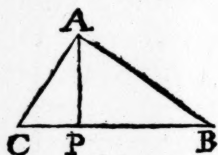
Theor: 10. Angulus in ſemicirculo eſt rectus 31 e 3.

Theor. 11. Si è puncto in peripheria circuli ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera ſecans: anguli inter ipſas comprehenſi menſura, æqualis erit ſemiperipheriæ abſciſſæ. pro 32 e 3.

Theor. 12. Triangula, ſive parallelogramma, æquialta, vel inter eaſdem parallelas, ſunt ut baſes. 35, 36, 37, 38, e 1. & 1 e 6.

Theor. 13. Recta biſecans angulum trianguli, ſecat baſem ratione crurum 3 e 6.

Theor: 14. Triangulum rectangulum quodvis notetur literis A B C: ſic ut A ſit angulus rectus: & BA Baſis: & CA Cathetus: BC Hypotenuſa.



Theor. 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo recto in Hypotenuſā, dividit triangulū in duo triangula, tum toti, tū ſibi ipſis ſimilia. 8 e 6.

BC. BA. CA ::	BA. BP. AP ::	CA. AP. CP.
Hypotenuſæ	Baſes	Catheti.

Unde ſequitur.

1° Perpendicularem eſſe mediam proportionalem inter ſegmenta Hypotenuſæ. Ideoque quadratum perpendicularis æquale eſſe rectangulo ſub ſegmētis. Scil: ∺ BP, AP, CP. Et APq = BP × CP.

med: proportional 2° Baſem eſſe mediam proportionalem inter Hypotenuſam, & ſegmentum Hypotenuſæ Baſi conterminum. Scil: ∺ BC, BA, BP. BC × BP = BAq

3° Cathetum eſſe mediam proportionalem inter Hypotenuſam, & ſegmentum Hypotenuſæ Catheto con-

BC×BP=BAq
BC×CP=CAq

conterminum. Scil: ∺ BC, CA, CP.

4° Basis & Catheti quadrata, esse ut segmenta Hypotenusæ contermina. BP. CP :: BAq. CAq. Nam BP. CP :: BC×BP. BC×CP :: BAq. CAq. nam

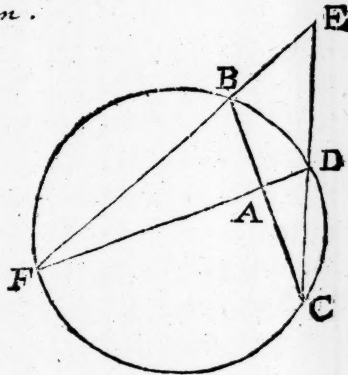
5° Quadratum Hypotenusæ æquari quadratis Basis & Catheti simul. BCq = BAq + CAq. Nam BCq = BC×BP † EC×CP = BAq + CAq. vel

Theor. 16. Si in circulo duæ rectæ inscriptæ sese mutuò intersecent intra circulum (in puncto A); rectangulum sub segmentis unius, æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 35 e 3.

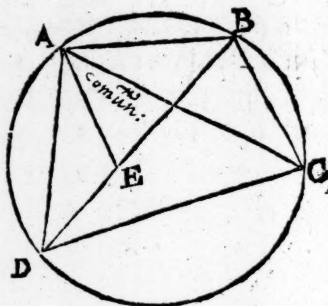
Si verò sese extra circulum intersecent (in puncto E) Rectangula sub segmentis utriusque à puncto ad convexum & concavum circuli, sunt æqualia. 36 & 37 e 3. Dico primò AB × AC = AD × AF. Nam tri: BAF, DAC sim. Dico secundo EB × EF = ED × EC. Nam tri: BEC, BEF sim. quia angulus E est com:

ang: BAF in ordine ang: DAC mysterium.

ergo AF×AD = AB×AC et EB×EF = EC×ED



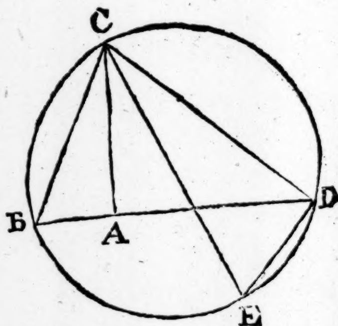
Theo: 17. Quadrilateri in circulo inſcripti anguli interiores oppoſiti ſimul æquantur duobus rectis, 22 e 3. Et ſi ducantur duo diagonii, rectangulum ſub diagoniis, ęquale erit duobus rectangulis ſub lateribus oppoſitis, Dico $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ Nã ſumpto ang: $DAE = CAB$; erunt tri: ACB, ADE ſim. & ADC, AEB ſim. Ang{BAC in eod seg.



BAE=DAC
ABE=ACD
AEB=ADC

Quare $\left\{ \begin{array}{l} AC.\ CB :: AD.\ DE \\ AC.\ CD :: AB.\ BE \end{array} \right\}$ ergo,

Theor: 18. Si ex angulo quovìs trianguli circulo inſcripti, demittatur perpendicularis in latus oppoſitum: Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejuſdem anguli: ſic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB:: CD.CE. Nam tri: ABC, DCE ſim.



Theor: 19. Triangula unum angulum æqualem habentia

habentia, rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor: 20. Si ſemiſumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa ſemiſumma, continuè inter ſe multiplicentur: Vel aliter, ſi trianguli quovis latere ſumpto pro baſe, & reliquis duobus pro cruribus; Rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia ſummæ crurum & baſis, ducatur in rectangulum ſub ſemiſumma & ſemidifferentia baſis & differentiæ crurum: Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli. Eſto triangulum BCD, cujus crura ſint BC & BD, & baſis CD. Biſecentur tres anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur IA, IE, IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare ſi cruri BC adjungantur in directum, CF=DE; erit $BF=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}CD$:

Et $BA=BF-CD=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}BD-\frac{1}{2}CD$:

Et $AC=BF-BD=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}BC\ \frac{1}{2}BD$:

Et $CF=BF-BC=\frac{1}{2}CD-\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}BD$. Menſuratis BG =BF: erit CK=CF: ducantur perpendiculares FH, GH,

GH,KH: Et protrahatur BI in H. quia ang. FCK+FHK= 2 Rect=FCK+ACO. Et ang:ACO+AIO= 2 Rect: Erunt quadrangula FCKH, AIOC sim. Et tri:CFH, IAC sim. Sunt etiam tri: BAI, BFH sim. His expositis, Dico quadratum areæ trianguli, nempe BFq×IAq=BF×BA×AC×CF.

Nam IA.BA::FH.BF } propter tri: sim.
Et IA.AC::CF.FH }

Quare per multipl: IAq×BF=BA×AC×CF.

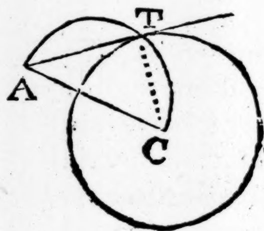
Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl:1. A dato puncto, vel ad datam distantiam, datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31 e 1.

Probl: 2. Data recta linea, à dato in ea puncto, rectam lineam perpendicularem, sive ad angulos rectos, excitare. 11 e 1.

Probl. 3. Super datam rectam lineam, à dato extra ipsam puncto, perpendicularem rectam demittere. 12 e 1.

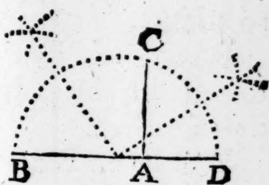
Probl. 4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quę ipsum circulum tangat. 17 e 3.



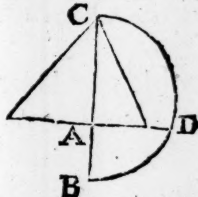
Probl:5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12 e 6.

Probl. 6.

Probl: 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC, adinvenire. 13 e 6.



Probl: 7. Datis duabus rectis lineis AB, AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.



Probl: 8. Dato triangulo, cujus altitudo est AC, & semibasis AB, æquale quadratum ADq, constituere.



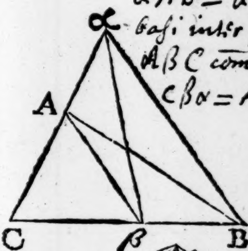
A·B :: C. $\frac{B \times A}{C}$ p reciproc proportion:

Probl: 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, statuere. 14 e 6.

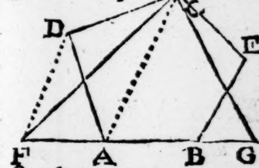
Probl: 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem constituere.

Ex punctis altitudinum A & α, in angulos oppositos linea Aβ & αB, ductæ, sint parallelæ.

αAB = αβB in cad. basi inter paral: et AβC comun: ergo Cβα = ABC



Probl: 11. Dato polygono æquale triangulum constituere.



in cad. basi FDA & FDC erg: =
tolle comun FDR · FRA = DRC

Probl: 12. Datis tribus punctis, non in directum positis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl: 13.

Probl: 13. Datis trianguli rectanguli base & Catheto, invenire hypotenusam; vel quadratum quadrato addere.

Probl: 14. Datis trianguli rectanguli hypotenusa & base, invenire cathetum; vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl: 15. Binarum figurarum similium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis. Aq.Mq :: A. E. √.Aq . √.Mq :: A . M | A . M :: M . E erit Aq . Mq :: A . E.

Probl: 16. Datæ figuræ similem figuram, in data ratione constituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipsius, & latus simile. R.√RS :: A. M. Ratio fig: sit R. S. erit q. R . √RS :: A . M nā ÷ 9 6 6/3 4/2 9 . 4 :: 6×3 . 4×2

Probl: 17. In dato circulo hexagonum ordinatum inscribere. 15 e 4.

Probl: 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inscribere. Secetur semidiameter circuli secundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl: 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inscribere. Quæratur Hypotenusa trianguli rectanguli, cujus Basis sit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

17. Si sit R . S :: Aq . Bq, quanta est B dic R . √RS :: A . B vel R . S :: A . E . √AE = M

Cap. XIX.

Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibusq; solvendis. ad quem quasi scopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.

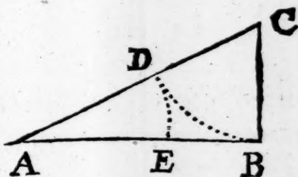
Probl: I. Inventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B secetur sic ut rectangulum sub tota B, & minore

Prob: 16 Dato figuro plano similem figurā constituere in ratione [redacted] R ad S vt A ad E: esto figuro dato latus unū A latus alterius homologum erit √AE vel M investigandum sit vt R . S :: A . E vel R . √RS :: A . M

minore segmento, ^E.B æquetur quadrato majoris segmenti. AE B,A, B-A, ÷

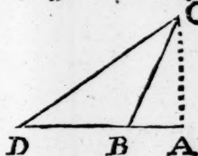
Ponatur majus segmentum A: minus erit B-A. ducatur B-A in B: fietque Bq-BA=Aq: vel Aq+BA =Bq. Quare $\sqrt{u}$: Bq+$\frac{1}{4}$Bq:-$\frac{1}{2}$B=A, per 9 cap. 16. * Quod Theorema verbis enunciatur sic: Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipsius quadrans: & è latere quadrato summæ; tollatur semis lineæ datæ: reliquum erit segmentum majus.

Geometricè autem construetur, sic, Fiat AB=B: eique ad angulos rectos statuatur BC=$\frac{1}{2}$B: & ducatur Hypotenusa AC: erit AC=$\sqrt{u}$:Bq+$\frac{1}{4}$Bq. Abscindatur CD=BC. Eritque residuum AD=$\sqrt{u}$: Bq+$\frac{1}{4}$Bq:-$\frac{1}{2}$B. Denique mensuretur AE=AD, pro majore segmento.



Probl: II. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Basis obtusi anguli, cum lateribus. Esto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, sit obtusus: hujus Basis est DC: & latera BD, BC. Hîc BCq -BAq=CAq=DCq (-DAq, per 4e2)-BDq-2BD×BA-BAq. quare BCq+BDq=DCq-2BD×BA.

Expungatur vtrinq; BAq

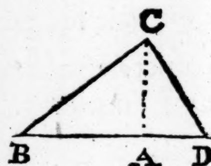


Quod theorema verbis enuntiatur, sic: In amblygoniis triangulis, quadratum lateris subtendentis obtusum angulum, excedit summam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo sub

*9 Cap: 16: ad Aq+BA=Bq respondet Eq+XE=Æ
ergo { vt. reg: II. $\sqrt{u}$: $\frac{1}{4}$Xq+Æ:-$\frac{1}{2}$X=E
ita $\sqrt{u}$: $\frac{1}{4}$Xq+Bq:-$\frac{1}{2}$X=A }

ſub uno laterum circa obtuſum angulum, & ſegmento ipſius (continuati) inter obtuſum angulum & perpendiculum.

Probl: III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio Baſis acuti anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit acutus. hujus Baſis eſt DC: & latera BC, BD. *expungatur utrinq; BAq*



Hîc BCq - BAq = CAq = DCq (-DAq, per 7 e 2) - BDq + 2BD × BA - BAq. Quare BCq + BDq = DCq + 2BD × BA. (Eodem prorſus modo procederet Demonſtratio, ſi D ponatur inter B & A.) In verbis, ſic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris ſubtendentis acutum angulum, minus eſt quam ſumma quadratorum laterum, &c. (2BD × BA - BAq + DAq = BDq, 7 e 2)

BDq+BAq=DAq+2BD×BA

Probl: IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo AB × AD. Eſto AB + AD = 2BM. Quare AB + AD ſecetur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, AB × AD = BMq - AMq. Jam ſupponatur ACq = AB × AD: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenuſa CM = BM ſemiſummæ laterum; & baſis AM ſemidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæſiti, per 48 e 1.

c.18. §.3.



Inventio areæ trianguli plani.

Probl: V. Attulit ad me amicus quidam meus, vir doctus,

doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonstratione munirem, postulavit. Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapsi sunt anni) hâc ferè formâ, licet non in iisdem literis.

In triangulo plano cujus latera sunt A, E, B; $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{8} BqEq - \frac{1}{16} Eqq \\ \frac{1}{8} EqAq - \frac{1}{16} Aqq \\ \frac{1}{8} AqBq - \frac{1}{16} Bqq \end{array} \right\}$ æquantur quadrato areæ trianguli.

Postquam aliquamdiu mecum cogitassem, occurrit mihi 17, c 18, Theor: 20, quod commodissimum huic nodo solvendo duxi. Nam si trianguli duo crura sint A, E; & basis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E - - \frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - - \frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B - - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq + \frac{1}{8}AqBq + \frac{1}{8}EqBq - - \frac{1}{16}Aqq - - \frac{1}{16}Eqq - - \frac{1}{16}Bqq$. Quod est ipsum Theorema propositum.

Atque hinc non solum postulato satisfeci; sed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui.

Nam quia $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}B$.

Et $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E - - \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}Z - - \frac{1}{2}B$.

Et quia $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}X$:

Et $\frac{1}{2}B - - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}B - - \frac{1}{2}X$.

Erit $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z - - \frac{1}{2}B = \frac{1}{4}Zq - - \frac{1}{4}Bq$.

Et $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B - - \frac{1}{2}X = \frac{1}{4}Bq - - \frac{1}{4}Xq$.

Liquet igitur primò, $\frac{1}{4}Zq - - \frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bb - - \frac{1}{4}Xq = Q$: areæ trianguli. In verbis sic, Si quadrans differentiæ quadratorum summæ crurum & basis ducatur in quadrantem differentiæ quadratorum basis & differentiæ

crurum;

crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde quia $\frac{1}{4}$Zq-$\frac{1}{4}B$q in $\frac{1}{4}B$q-$\frac{1}{4}$Xq=$\frac{1}{16}$ZqBq+$\frac{1}{16}B$qXq-$\frac{1}{16}B$qq-$\frac{1}{16}$ZqXq : Liquet secundò, Zq+Xq-Bq in $\frac{1}{16}B$q mi $\frac{1}{16}$ZqXq=Q: Areæ trianguli.

Item quia Zq+Xq=2Z, per 11, c. 18: Et ZqXq =Xq, per 14, c. 18 : Liquet tertiò 2Z-Bq in $\frac{1}{16}$Bq mi Q: $\frac{1}{4}$X=Q: Areæ trianguli.

Denique ex his comparatis, erit quartò $\frac{2Z\,Bq-Bqq-Xq}{16}$=Q: Areæ tri.

Hæc posteriora Theoremata verbis facilè enuntiantur.

Probl: IV. Problematum circa Progressionem Arithmeticam solutio in viginti Propositionibus. Symbola verborum hæc sint: α primus terminus minimus. ω ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z summa omnium terminorum. Est igitur T--1 numerus differentiarum: ideoque TX--X=ω-α, summa differentiarum.

primi non differt a seipso

Datis tribus ex quinque illis α, ω, T, X, Z, invenire duo reliqua per viginti propositiones sequentes (tot enim sunt varietates) hoc ordine.

Datis	Quæruntur	Per Propositi:
α, ω, T	Z & X	1 & 2
α, ω, X	T & Z	3 & 4
α, ω, Z	T & X	5 & 6
α, T, X	ω & Z	7 & 8
α, T, Z	ω & X	9 & 10

Datis

Datis	Quæruntur	Per Proposition:
α, X, Z	ω & T	11 & 12
ω, T, X	α & Z	13 & 14
ω, T, Z	α & X	15 & 16
ω, X, Z	α & T	17 & 18
T, A, Z	α & ω	19 & 20

Prop: I. $T\omega + T\alpha = 2Z$. $\frac{\omega+\alpha}{T} = 2Z$ p 23. 6

II. $\frac{\omega-\alpha}{T-1} = X$. nam $\omega = \alpha + T - 1$ in X et $\omega - \alpha = T - 1$ in X vel $\frac{\omega-\alpha}{T-1} = \frac{T-1 \text{ in } X}{T-1}$ erg: p 36. § 16.

III. $\frac{\omega-\alpha}{X} + 1 = T$. per 2. nam $\omega - \alpha = X \times T - 1$. p 7m et $\frac{\omega-\alpha}{X} = T - 1$. erg

IV. $\frac{\omega q - \alpha q}{X} + \omega + \alpha = 2Z$. per 1. 3. nam $\frac{\omega+\alpha \text{ in } X}{X}$ in $\frac{\omega-\alpha}{X} + 1 = 2Z$

V. $\frac{2Z}{\omega+\alpha} = T$. per 1. $\frac{2Z}{\omega+\alpha} = \frac{T\omega + T\alpha}{\omega+\alpha}$

VI. $\frac{\omega q - \alpha q}{2Z-\omega-\alpha} = X$. per 4. $\frac{\omega q - \alpha q}{X} = 2Z - \omega - \alpha$ dux utrumq in X $\omega q - \alpha q = X$ in $2Z - \omega - \alpha$

VII. $TX - X + \alpha = \omega$. per 2 p problema 6um præcedens

VIII. $TX - X + 2\alpha$ in $T = 2Z$. per 1 & 7. pro ω sumatur $TX - X + \alpha$ et addatur α aggreg. in T

IX. $\frac{2Z - T\alpha}{T} = \omega$ per 1. $\frac{2Z - T\alpha}{T} = \frac{T\omega}{T}$ applica utrumq ad T

X. $\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T} = X$. per 2. 8.

$TX - X + 2\alpha = 2Z$
T
$TqX - TX + 2T\alpha = 2Z$
vel $TqX - TX = 2Z - 2T\alpha$ erit $\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T} = X$
fit communis depressio per $\frac{TqX - TX}{Tq - T} = \frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T}$

XI.

XI. $\sqrt{u}: \alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX : -\frac{1}{2}X = \omega$. per 4.

XII. $\sqrt{u}: \frac{\alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX}{Xq} : -\alpha + \frac{1}{2}X = T$. per 8.

[illegible]

XIII. $\omega + X - TX = \alpha$. per 7. p. antithesin.

XIV. $2\omega + X - TX$ in $T = 2Z$. per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T} - \omega = \alpha$. per 9.

$\frac{2T\omega - 2Z}{Tq - T} = \frac{TqX - TX}{T - T}$

XVI. $\frac{2T\omega - 2Z}{Tq - T} = X$. per 14. vt 10

XVII. $\frac{1}{2}X \pm \sqrt{u}: \omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX : = \alpha$. per 4.

$\omega q + X\omega + 2ZX = \alpha q - X\alpha$

prout α contigerit $\left\{\begin{matrix} \text{major} \\ \text{minor} \end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XVIII. $\frac{\omega + \frac{1}{2}X}{X} \mp \sqrt{u}: \frac{\omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX}{Xq} : = T$. per 14.

prout α contigerit $\left\{\begin{matrix} \text{major} \\ \text{minor} \end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XIX. $\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = \alpha$. per 10.

XX. $\frac{2Z}{2T} + \frac{TX}{2} - \frac{X}{2} = \omega$. per 16.

$2Z - 2T\omega = TqX - TX$ | $2Z - TqX + TX = 2T\alpha$ | $\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = \alpha$

$\alpha.4: X.3: T.13: \omega.40: 2Z.572:$

$\alpha \sqsubset \frac{1}{2}X$ 169 1600

$\alpha.2X$ 6 T13 ω74 2Z988

$\alpha \sqsubset \frac{1}{2}X$ 5476

Probl

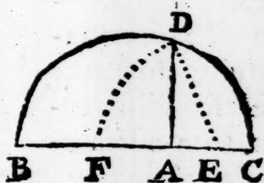
Cap: 19

Probl.VII. Euclides 11 e 2, docuit secare lineam datam, sic, ut rectangulum sub tota & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti: quæ sectio est penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; Data linea AB ita secetur, ut rectangulum sub tota AB, & minore segmento, ad quadratum majoris segmenti, rationem quamcunque possibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat $R.S::AB.AC$: qui quartus sit proportionalis: tum pro majore segmento ponatur A: minus segmentum erit $AB-A$: quod ductum in AB, dabit rectangulum $ABq-AB\times A$. Erit igitur $AB.AC::ABq-AB\times A.Aq$. Ideoque per 3 cap. 6, $ABq\times AC-AB\times AC\times A=AB\times Aq$. Et divisis omnibus per AB, erit $AB\times AC-AC\times A=Aq$: vel $Aq+AC\times A=AB\times AC$. Et per 9 cap. 16, invenitur $\sqrt{u}:\frac{1}{4}ACq+AB\times AC:-\frac{1}{2}AC=A$.

Hoc theorema inventum, verbis sic enunciatur: Si ad quadratum semissis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum sub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato summæ tollatur semis quarti proportionalis: Reliquum erit segmentum majus.

Geometricè sic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat semicirculus: Et super BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, secans semicirculū in D. tum bisecta AC in E, mensuretur EF=ED. Dico lineam AB sic secari in puncto F

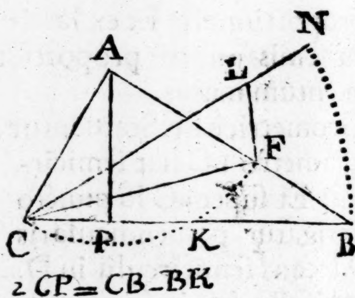




ACxAF+ACxBF=ACxAF+AFq

ut ſit R. S :: AB×BF. AFq. Nam AC×AF+AC×BF =AC×AB±ADq=CF×AF, per 6 c 2, =AC×AF+AFq. Quare AC×BF=AFq. Atqui AB. AC :: AB×BF. AC×BF. Ergo ; vel facilius sic * vid p. 81

Prob. VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto ſecat hypotenuſam) una cum BK differentia ſegmentorum hypotenuſæ, invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum. Primò detur latus minus CA. Puta factum eſſe quod poſtulatur:, ſitque triangulum rectangulum BAC: in quo è vertice in hypotenuſam demittatur perpendicularis AP, ſecans hypotenuſam in BP & CP ſegmenta. Eſt autem $CP=\frac{BC-BK}{2}$. Quia eſt BC. CA :: CA. $\frac{BC-BK}{2}$ erit $\frac{BCq-BC\times BK}{2}=CAq$: vel $BCq-BK\times BC=2CAq$. quare per 9 c 16, $\sqrt{q: \frac{1}{4}BKq+2CAq}: +\frac{1}{2}BK=BC$. Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadratum ſemidifferentiæ ſegmentorum hypotenuſæ addatur duobus quadratis lateris dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa ſemidifferentia:. tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.



Geometricè

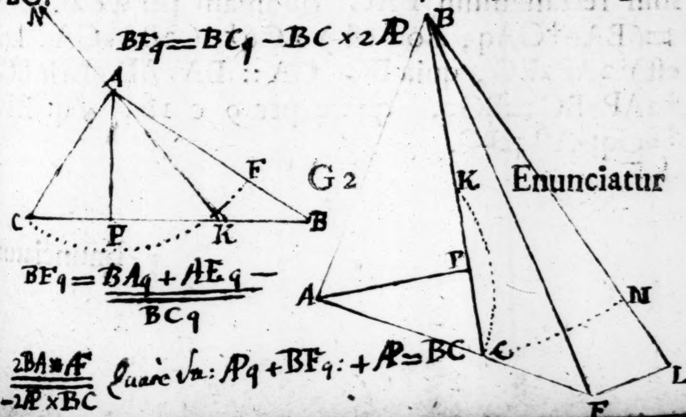
Geometricè sic. Sumpta $AF = AC$; Ducatur CF: ipsique perpendicularis $FL = \frac{BK}{2}$ & extendatur CL ad N, ut $LN = \frac{1}{2}BK$. Erit $CN = BC$. quare inscribatur circulo $CK = CN - BK$: & producatur, &c. Nam $CFq = 2CAq$. & $CLq = 2CAq + \frac{1}{4}BKq$. Ergo,

Si verò detur majus latus BA: hujusmodi invenietur æquatio, $\sqrt{q}: \frac{1}{4}BKq + 2BAq: - \frac{1}{2}BK = BC$. sumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

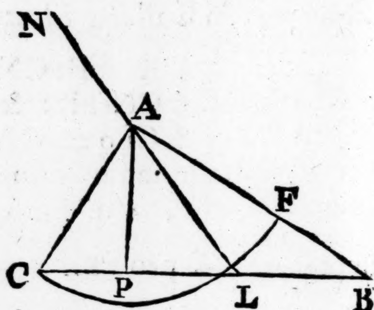
Et modus geometricus priori non absimilis.

Probl: IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenusam: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 7 e 2. $2BA \times AF + BFq = BAq + AFq$; Ideoque $BFq = (ABq + AFq$, hoc est$)$ $BCq - (BA \times 2CA$. hoc est$)$ $BC \times 2AP$, quia $BC. CA :: BA. AP.$* Erit $BCq - 2AP \times BC = BFq$. quare per 9 c 16. $\sqrt{q}: APq + BFq: + AP = BC$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis sic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipsa perpendiculari: tota aucta æqualis erit hypotenusæ.

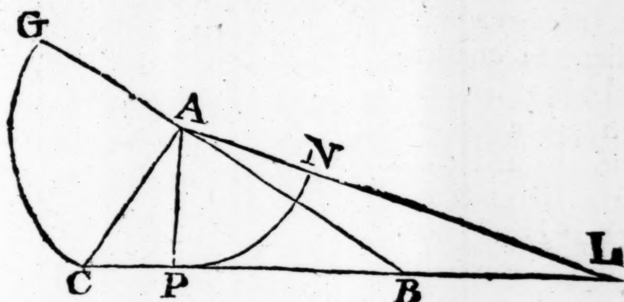


Geometricè sic. Fiat PL = BF. Et extendatur LA ad N, ut AN = AP. Erit LN = BC. Diametro igitur BC describatur semicirculus; in quo statuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

Probl: X. Datis summa laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenusam, AP: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, BGq = (BAq + GAq, hoc est) BCq + (2BA × CA, hoc est) 2AP × BC, quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq + 2AP × BC = BGq. quare per 9 c 16, √q: APq + BGq: - AP = BC.

Enunciatur



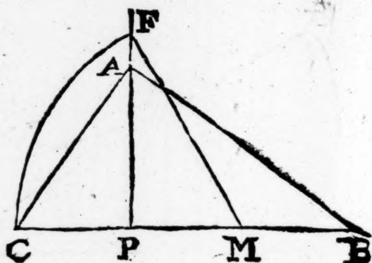
Enunciatur autem hoc theorema ſic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum ſummæ laterum; & aggregati latus quadratum minuatur ipſa perpendiculari: linea reliqua æqualis erit hypotenuſæ.

Geometricè ſic. Fiat PL = BG & ducatur AL: ex qua abſcindatur AN = AP. Erit LN = BC. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus, &c.

Probl: XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno ſegmento hypotenuſæ BP: invenire tum alterum ſegmentum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BP + CP. CA :: CA. CP. Erit BP × CP + CPq = CAq. quare per 9 c 16, √q: $\frac{1}{4}$ BPq + CAq: − $\frac{1}{2}$ BP = CP.

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si quadrato semissis segmenti hypotenusæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipso semisse: linea reliqua erit alterum hypotenusæ segmentum.



Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF = CA & bisecta BP in M, ducatur MF: cui mensuretur æqualis MC. Inventum est igitur CP alterum segmentum: & BC tota hypotenusa. Diametro BC describatur semicirculus: in quo inscribantur CA, & BA.

Probl: XII Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & summa laterum, BG: invenire tum differentiam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BG. BK :: BC. BF: est etiam BGq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq + CAq. BFq. Item 2BGq - BKq. BKq :: (2BAq + 2CAq — BFq hoc est) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq + 2CAq = BGq + BFq. quare √q: 2BGq — BKq. BG :: BK. BF :: BG. BC.

Enunciatur autem hoc Theorema verbis sic.

Si

Si è quadrato summæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit, ut latus quadratum reliqui, ad summam laterum; sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad differentiam laterum, & sic summa laterũ ad hypotenusam.

Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH = BG. tum diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = BK: & ducatur BI. Est igitur BI = √q: 2BGq — BKq. fiat etiam BL = BK. Ducatur GI: eique parallela LF. Ergo inventa est BF differentia laterum. Nam BI . BG :: BK = BL . BF

Probl: XIII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & differentia laterum BF: invenire tum summam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BF. BK :: BC. BG: est etiam BFq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq + CAq. BGq. Item 2BFq — BKq. BKq :: (2BAq + 2CAq — BGq, hoc est) BFq. BGq: Nam per 8 c 18 2BAq + 2CAq = BGq + BFq. Quare √q: 2BFq — BKq. BF :: BK, BG :: BF, BC.

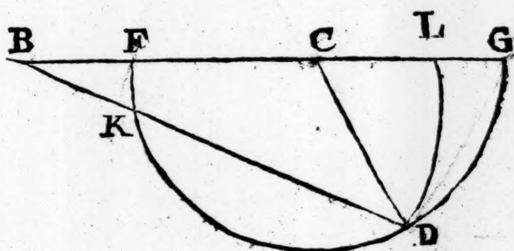
Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ ſegmentorum hypotenuſæ. Erit, ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; ſic differentia ſegmentorum hypotenuſæ, ad ſummam laterum: & ſic differentia laterum, ad hypotenuſam.

Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH=BF. tum diametro BH deſcribatur ſemicirculus, in quo inſcribatur BI=BK: & ducatur HI. Eſt igitur HI=√q: 2BFq −BKq. fiat BL=HI. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa eſt BG, ſumma laterum. BL . BF :: BI=BK . BG . = BA + AC

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuſcunq; differentia laterum FB, differentia ſegmentorum baſis BK, & differentia inter majus latus & baſem CL: invenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum. Et primò ſit exceſſus penes baſem. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitq; triangulum BCD.

Quo-

quoniam eſt FB. BK::BD. $\frac{BK \times BD}{BF}$ = BG, per 17 c 18, Th:16. Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{BF}$ = FG: & $\frac{BK \times BD - BFq}{2FB}$ = CF. adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF}$ = BC. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF \times CL}{2BF}$: Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK . 2CL + BF :: BF . BD :: BK . BG$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentiam ſegmentorum baſis, eſt ad aggregatum differentiæ inter majus latus & baſim duplicatæ & differentiæ laterum; ſic differentia laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad ſummam laterum.

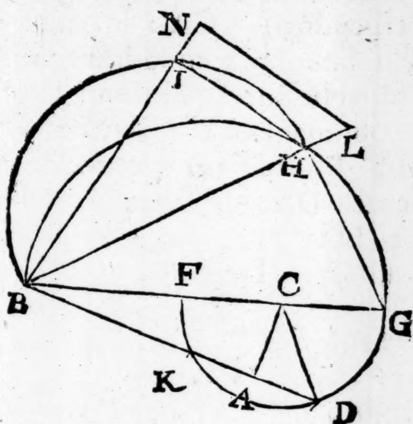
Geometrica praxis facilior eſt, quàm ut neceſſe ſit apponi.

Si verò exceſſus fuerit penes majus latus: theorema erit, $BK - 2BF . 2CL - BF :: BF . BD :: BK . BG$.

Hujus theorematis investigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL. postulatur invenire tum basem, tum differentiam laterum, solutionem, omitto; ut habeant studiosi analyseos, quo solertiam suam exerceant.

Probl. XV. Datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum differentiam laterum, tum ipsum triangulum. Puta factū esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th: 16. $BG . BD :: BK . BF$. Et per 5 c 18, $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$. Et per 47 e 1 ($4ADq$ hoc est) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$, hoc est) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Tolle FG ex BG: & $BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq : = BF$. Quare erit,
$BG . BD :: BK . BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Et per 3 c 6, $BK \times BD = BGq - \sqrt{q}: BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq$. Est igitur per 8 c 16, $Q: BGq - BK \times BD$, hoc est, $BGqq - \underline{BGq \times 2BK \times BD} + BKq \times BDq = BGq \times BDq + BGq \times BKq - \underline{BGq \times 2BK \times BD} + BGq \times 4CAq$. Ideóque $BGq \times BDq - BKq \times BDq = BGqq - BGq \times BKq - BGq \times 4CAq$. vel etiam, $BGq - BKq$ in $BDq = BGq - BKq - 4CAq$ in BGq. Ergo $\sqrt{q}: BGq - BKq . \sqrt{q}: BGq - BKq - 4CAq :: BG . BD :: BK . BF$.

Enuncia-



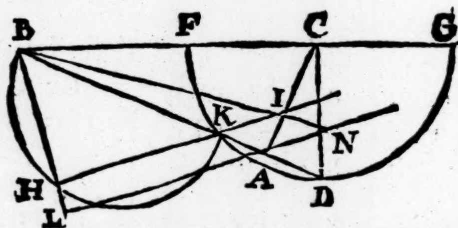
Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic, Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata ſummæ laterum, & differentiæ ſegmentorum baſis, eſt ad latus quadratum ejuſdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; ſic ſumma laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad differentiam laterum.

Geometricè ſic. Diametro BG deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribatur $GH = BK$: & BH. Eſt igitur $BH = \sqrt{q}: BGq - BKq$. Rurſus diametro BH deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribatur $HI = 2CA$: & BI. Eſt igitur $BI = \sqrt{q}: BGq - BKq - 4CAq$. Fiat $BL = BG$: & ab L ducatur LN parallela ipſi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa eſt $BN = BD$.

Probl. XVI. Datis trianguli plani cujuſcunque differentia

differentia laterum BF, differentia ſegmentorum baſis BK, & perpendiculari CA : invenire tum baſem, tum ſummam laterum, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur : ſitque triangulum BCD. Quoniam eſt BG.BD::BK.BF. Et $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$, per 5 c 18. Et per 47 e 1, ($4ADq$, hoc eſt) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$, hoc eſt) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Adde FG ad BF: Et $BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = BG$. Quare BF. BD :: BK. $BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Item $BK \times BD = BFq + \sqrt{q}: BFq \times BDq + BFq \times BKq - BFq \times 2BK \times BD + BFq \times 4CAq$. Eſt igitur $Q: BK \times BD - BFq$, hoc eſt, $BKq \times BDq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFqq = BFq \times BDq + BFq \times BKq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFq \times 4CAq$. Ideoque $BKq \times BDq - BFq \times BDq = BFq \times BKq - BFqq + BFq \times 4CAq$. vel etiam $BKq - BFq$ in $BDq = BKq - BFq + 4CAq$ in BFq. Ergo $\sqrt{q}: BKq - BFq$. $\sqrt{q}: BKq - BFq + 4CAq$:: BF.BD::BK.BG.



Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ ſegmentorum baſis, & differentiæ laterum, eſt ad latus quadratum ejuſdem differentiæ auctæ quadra-

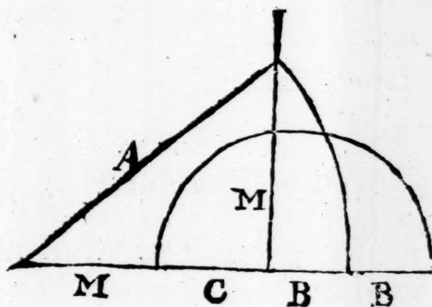
to

to perpendiculi duplicati; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometricè sic. Diametro BK describatur circulus: in quo inscribatur KH=BF: & BH. Est igitur BH=$\sqrt{q}$: BKq −BFq. Fiat BHL=BF: & HKI =2CA. Ducatur BI. Est igitur BI=$\sqrt{q}$: BKq −BFq+4CAq. Ducatur etiam LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN=BD.

Probl: XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter basem & hypotenusam B, & differentia inter cathetum & hypotenusam C: invenire tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Pro hypotenusa ponatur A. Basis erit A −B. & Cathetus A −C. & per 47 e 1, Cathetus est $\sqrt{q}$: 2BA −Bq. quare $\sqrt{q}$: 2BA −Bq: =A −C. Et 2BA −Bq=Aq −2CA+Cq. vel 2B+2C in A mi Aq =Bq+Cq. Ergo per 9 c 16, B+C+$\sqrt{q}$: 2BC=A, hypotenusæ.



Enunci-

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Aggregatum utriuſque differentiæ (tum baſis tum catheti) ab hypotenuſa; unâ cum √q duplicis rectanguli ſub ipſis differentiis, æquatur hypotenuſæ.

Geometricè ſic. Ducatur linea infinita in qua menſurentur B, B, & C. hac diametro fiat ſemicirculus. Et in communi B & C termino ſtatuatur ad angulos rectos linea M. Eſt igitur Mq = 2BC. menſuretur etiam M in linea infinita poſt C. Et ſemidiametro M+C+B deſcribatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. tum à puncto concurſus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenuſa. Et deſcriptum erit triangulum rectangulum quæſitum.

Probl. XVIII. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus eſſe eo, quod ad dimidium applicatur. Prop: eſt 28 e 6.

In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus Altitudo R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipſis ſtatuatur major.

Ponatur latus parallelogrammi quæſiti A: portio ablatitia erit AB-A. Fiat S. R :: AB-A. $\frac{AB \times R - R \times A}{S}$ altitudo parallelogrāmi quæſiti: Ducatur in A latus: eritque $\frac{AB \times R \times A - R \times Aq}{S} = C$: vel $AB \times A - Aq = \frac{C \times S}{R}$

Et

Et per 9, Cap. 16, $\frac{AB}{2} + \sqrt{q}\,\frac{ABq}{4} - \frac{C*S}{R} := A$.

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem: & quotus ex quadrato semissis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.

Geometricè sic: Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum R.S::ER.ES Statuantur ER & ES ad angulos rectos: Sumptaque SF=ER, diametro EF describatur semicirculus: in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq = \frac{C*S}{R}$ Ex G puncto mēsuretur $GH = \frac{1}{2}AB = HB$: erit $HS = \sqrt{:}\,\frac{ABq}{4} - \frac{C*S}{R}$ cui si adjungas $HA = \frac{1}{2}AB$; erit AS latus parallelogrammi quæsiti. Et BS=AB-A portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, erit altitudo. Ergò parallelogrammum quæsitum est ASKN, factum ipsi D æquiangulum.

Probl. XIX. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo

rectilineo C æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato, Prop: est 29 e 6.

In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, sicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A : Portio adjectitia erit A-AB. Fiat S.R::A-AB. $\frac{R*A-AB*R}{S}$ altitudo parallelogrãmi quæsiti. Ducatur in A latus: Eritque $\frac{R*Aq-AB*R*A}{S} = C$. vel $Aq - AB*A = \frac{C*S}{R}$. Et per 9 c 16, $\sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C*S}{R} : + \frac{AB}{2} = A$.

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D, & factus per altitudinem dividatur: & quotus a datur quadrato semissis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.

Geometricè sic. Fiat ER = √qC. Tũ R.S::ER.EB. Statu-

Cap: 19.

Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque BF=ER, diametro EF describatur semicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit BGq $=\frac{C \times S}{R}$. Esto BH=$\frac{1}{2}$AB=AH. Et ducatur GH $=\sqrt{q:}\frac{ABq}{4}+\frac{C \times S}{R}:=$HS: Est igitur AS=A lateri parallelogrammi quæsiti: Et BS=A-AB portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæsitum est, ASKN factum ipsi D æquiangulum.

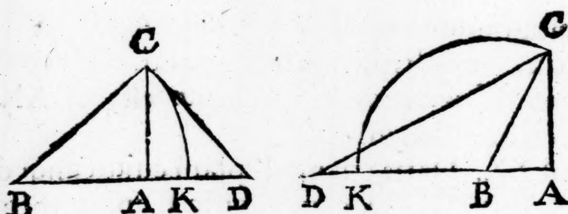
Probl. XX. Datis trianguli plani cujuscunq; duobus lateribus BC, BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus, vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipsorum oppositum.

Esto factum quod postulatur: sitque triangulum BCD. Centro B, semidiametro BC, describatur arcus CK: & perpendicularis CA. Est igitur KD differentia laterum: & AK similis sinui verso anguli B. Nam Rad. svB::BK. AK. Estque AK$=\frac{BK \times svB}{Rad.}$. Est autem etiam AK=BK∓BA: ut ex schematibus comparatis liquet.

Et quia BDq+BKq=tum
$\left\{\begin{array}{l}2BD \times BK+KDq. \text{ per 5 c 18}\\ CDq\pm 2BD \times BA. \text{ per 2, 3, c 19.}\end{array}\right\}$

Erit 2BD × BK + KDq = CDq ± 2BD × BA. Quare 2BD × BK ∓ 2BD × BA. hoc est, 2BD × AK +KDq=CDq. at verò 2BD × AK$=\frac{2BD \times BC \times svB.}{Rad.}$

Ergo $\frac{2BD \times BC \times sv B}{Rad:} + KDq = CDq$. Quod est theorema primum. Et $\frac{CDq - KDq \text{ in } Rad:}{2BD \times BC} = sv\,B$. Quod est theorema secundum.



Enunciatur quidem verbis primum theorema sic: Si duplicatum rectangulum sub lateribus datis ducatur in sinum versum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum æqualis erit quadrato tertii lateris.

Secundum verò sic: Si differentia quadratorum lateris oppositi, & differentiæ laterum, ducatur in Radium; & factus dividatur per duplicatum rectangulum sub lateribus continentibus: quotus æqualis erit sinui verso anguli quæsiti.

Probl. XXI. Datis frusti Pyramidis utraq; base Aq, Eq, & altitudine L: invenire mensuram frusti.

Prænoscendum est ex 7 & 10 e 12. quod parallelepipedon æquatur tribus pyramidibus; Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejusdẽ basis & altitudinis.

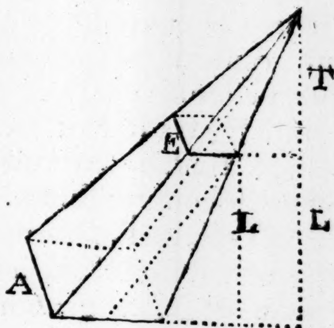
Estque altitudo pyramidis abscissæ (T) primò quærenda,

Cap: 19

renda, ſic, A — E.E::L.T. quare $\frac{LE}{X}$ = T. Et alti- $\frac{LE}{A-E}$ = T

tudo totius pyramidis eſt L†T. Item pyramis tota tripla eſt AqL†AqT. Et pyramis abſciſſa tripla eſt EqT. Ergo triplum fruſtrum pyramidis eſt AqL †AqT-EqT. quare $\frac{AqL+AqT-EqT}{3}$ = Aequo pyramid cuius baſ: sunt Aq. Eq et altitud: L.

Hoc theorema oſtendit unum modum commenſurandi fruſtum pyramidis: Enuntiatur autem verbis ſic.



Si ſolidum ſub baſe majore & tota altitudine multetur ſolido ſub baſe minore & altitudine pyramidis abſciſſæ: reliqui triens æqualis erit fruſto.

Rurſus quia 2 c 11. Aq - Eq = ZX: & T = $\frac{LE}{X}$ Erit AqL† (ZEL, hoc eſt per 3 e 2) AEL †EqL = AqL†AqT-EqT. Ergo triplex fruſtum pyramidis eſt etiam Aq†Eq†AE in L. hoc theorema docet alterum modum commenſurandi fruſtii enunciatur autem verbis ſic.

Si aggregatum utriuſque baſis fruſti pyramidis,& mediæ inter ipſas proportionalis, ducatur in altitudinem fruſti: facti triens æqualis erit fruſto.

Item quia per 2 c 11, 2Aq†2Eq = Zq†Xq: E-

 rit

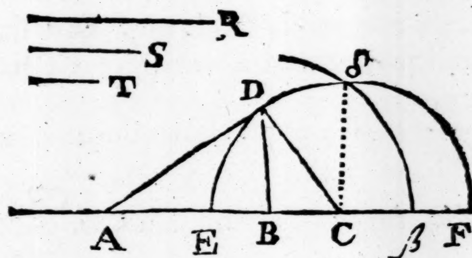
rit ZqL+XqL+2AEL æquale ſex fruſtis. at per 11 c 18. Xq+2AE=Z. Ergo Zq+Z in L æquale eſt ſex fruſtis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commenſurandi fruſti pyramidis. Enunciatur autem verbis ſic. Si ad aggregatum baſium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriuſque baſis, & ſumma eorundem ducatur in altitudinem fruſti: facti ſextans æqualis erit fruſto.

At verò ſi quæſtio ſit de commenſurando fruſto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, ſemiperipheria circuli æqualis eſt $\frac{22}{7}$ Radii ferè: vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad: Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. Et 113. 355:: Rad: q. area circuli. Quare Theorema primum de commenſurando fruſto coni, eſt $\frac{355}{452}$ AqL + $\frac{355}{452}$ AqT - $\frac{355}{452}$ EqT, æquatur triplo fruſto. Secundum eſt $\frac{355}{452}$ Aq + $\frac{355}{452}$ Eq + $\frac{355}{452}$ AE in L, æquatur triplo fruſto, Tertium eſt $\frac{355}{452}$ Zq + $\frac{355}{452}$ Z in L, æquatur ſextuplo fruſto Coni.

Probl: XXII. Problema Apolonii Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A, B, deſcribere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ AD, BD, ab iiſdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum eſſe quod quæritur: ſitq; circuli quæſiti centrum C in eadem recta linea cum punctis A, B; & ſemidiameter CD. Fiat R.S::S.T. Quia triangula duo ACD, DCB (ubicunq; ſumitur punctum D) ſunt ut AC ad BC: Et latera DA, DB, communi angulo C ſimiliter oppoſita, ſunt in ratione R ad S: & latus CD utriq; commune: Non difficile erit concipere triangula ipſa ACD, DCB eſſe ſimilia. Quare R, S:: DA.

DB: : AC. DC: : DC. BC. Et per 1 c 15, AC. BC: : Rq. Sq: : R. T. Si igitur pro BC ponatur A: Erit AB+A. A: : R. T. Et AB × T + T × A = R × A: vel $\frac{AB \times T}{R - T}$ = A. Denique √: AC × BC: = DC.



quæ enunciatur verbis ſic. Si punctorum intervallum ducatur in tertiū rationis datæ terminis proportionalem: & factus dividatur per exceſſum termini primi ſupra tertium: Quotus æqualis erit diſtantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadratum rectanguli ſub utraq; diſtantia à centro, æquatur ſemidiametro. Geometrica effectio facillima eſt.

Probl XXIII. Datis dolii, ſive vaſis vinarii, longitudine interna 2CL, & ſemidiametris tum medii CB, tum baſis LD: invenire dolii ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſphæroideos, quæ fit revolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſverſam ſive axim. Ad menſuram autem fruſti inveniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarum differentia eſt menſura fruſti.

Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{355}{113}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK:

Archim: de conoid: & ſphæroid: prop. 29.

Soliditas verò portionis IED abſciſſæ habetur ſic: LK.LK+KC:: $\frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{5}{2}$ LDq in $\frac{1}{3}$LI. Soliditas quæſita. Ibid. prop. 31.

Deſideratur autem adhuc (qui hujus negocii præcipuus eſt cardo) diameter tranſverſa ſive axis IK: quem ſic invenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua; ſicut in ſchemate. Et fiat CK. CB:: CB. $\frac{CBq}{CK}$ = CR, quod eſt ſemilatus rectum per 13 l 1 conic: Apoll. Iterum fiat CK. $\frac{CBq}{CK}$ :: CK + CL. $\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq}$ = LN. ducatur in IL, hoc eſt CK − CL (quod idem eſt ac ſi ducatur CBq in CKq−CLq per 11 c 18) fietque $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq}$ = LEq. per 13 l 1 conic: Apoll. Ergo $\sqrt{q}\,\frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq}$ = CK, ſemi-axi; hoc eſt $\frac{CB \times CL}{OP}$ = CK.

Quod

quod theorema verbis enunciatur sic. Si quadratum semidiametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à semidiametris medii & basis: quoti latus quadratum erit semiaxis sphæroideos.

Geometricè sic. Ducatur EO parallela axi. Et semidiametro CP=CB fiat arcus secans ipsam EO in P. continuetur CP donec concurrat cum base LE producta in F. Erit CF æqualis semiaxi quæsito. Aliter quia CP=CB: & CO=LE: erit (√u: CBq -LEq) OP.CB::CL.CF=CK.

Consectarium. Atque hinc patet meridianos in Analemmate esse veras Ellipses. verbi gratia, cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ. in quo descripta sit Ellipsis IEB. Dico eandem esse Meridianum. Nam cum CQ sit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: sitq; meridianorum proprium secare Æquinoctialem, & omnes circulos ipsi parallelos, in segmenta similia, per 10, 12 Theod: de sphæra. Si igitur constiterit esse CQ.CB::LF.LE: Ellipsis IEB secans ipsos erit meridianus. At verò CF=CQ: & CP =CB: & OC=LE: Estque CF.CP::LF.OC. Ergo,

Probl. XXIV. Datis trianguli rectanguli hypotenusa BC, & CM mediâ proportionali inter basem & cathetum; invenire triangulum.

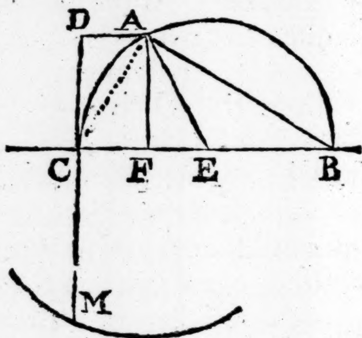
Puta factum esse quod postulatur: sitq; triangulum rectangulum BAC. quoniam basis est BA, Cathetus erit √q:BCq-BAq: & rectangulum sub ipsis √q: BCq×BAq-BAqq: cujus latus quadratum est √qq: BCq×BAq-BAqq: media proportionalis inter basem & Cathetum.

Item quoniam Cathetus est CA, Basis erit √q:BCq -CAq. Et rectangulum sub ipsis, √q:BCq×CAq -CAqq: cujus latus quadratum est √qq: BCq×CAq -CAqq: media proportionalis inter basem & Cathetũ.

Quare BCq×BAq-BAqq=CMqq. Et
BCq×CAq-CAqq=CMqq.

Ergo per 9c16, ½BCq± √q:¼BCqq-CMqq.= BAq / CAq.

Quod Theorema enuntiatur verbis sic. Si dimidiato hypotenusæ quadrato, latus quadratum excessus quadrãtis quadrato-quadrati hypotenusę supra quadrato-quadratum medii proportionalis inter basem & Cathetum, addatur; aggregatum erit basis quadratum: sin auferatur, reliquum erit quadratum Catheti.



Geometricè sic. Dimetro BC, & centro E medio, describatur semicirculus: Tum fiat BC. CM :: CM. CD =AF

=AF perpendic: intra ſemicirculum. Eſt igitur BC ×AF=CMq. compleatur triangulum BAC Nam $\frac{1}{4}$BCq (AEq)-AFq=EFq.

Quare $\frac{1}{2}$ BC ±(EF) √q: $\frac{1}{4}$ BCq-AFq:= { BF. CF.

Ducantur omnia in BC : fietque
$\frac{1}{2}$BCq ± √q: $\frac{1}{4}$BCqq-(BCq×AFq) CMqq:=

= { BC×BF=BAq. BC×CF=CAq.

Probl: XXV. Datis trianguli rectanguli baſe BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenuſam & Cathetum, invenire triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus eſt CA, hypotenuſa erit √q: BAq+CAq: Et media inter ipſas proportionalis √qq: CAqq+BAq×CAq.

Item quoniam hypotenuſa eſt BC, cathetus erit √q: BCq-BAq: Et media inter ipſas proportionalis √qq: BCqq-BAq×BCq.

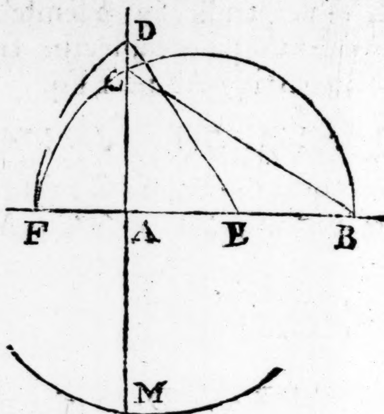
Quare CAqq+BAq×CAq=AMqq. Et
BCqq-BAq×CAq=AMqq. Ergò per 9 c 16

√q: $\frac{1}{4}$ BAqq+AMqq: ∓ $\frac{1}{2}$BAq= { CAq. BCq.

Quod Theorema verbis enuntiatur ſic. Si lateri quadrato ſummæ ex quadrante quadrato-quadrati baſis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenuſam & Cathetum, dimidiatum baſis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum: ſin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenuſæ.

Geometricè

Geometricè ſic. Fiat BA. AM:: AM. AD perpendic: eſt igitur BA $\times$ AD $=$ MAq. ex medio baſis puncto E ad perpendicularem AD, ducatur ED $=$ EF. Et diametro BF deſcribatur ſemicirculus ſecans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}$ BAq $+$ ADq $=$ EFq.



$$\text{Quare } \sqrt{q}: \tfrac{1}{4}BAq + ADq : \mp \tfrac{1}{2}BA = \begin{cases} AF. \\ BF. \end{cases}$$

Ducantur omnia in BA: fietque

$$\sqrt{q}: \tfrac{1}{4}BAqq + (BAq \times ADq)\, AMqq : \mp \tfrac{1}{2}BAq =$$
$$= \begin{cases} BA \times AF = CAq. \\ BA \times BF = BCq. \end{cases}$$

Conſectarium. Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, quarum ſuprema ſit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl: XXVI. De angulorum ſive peripheriarum biſectione, triſectione, quinquiſectione, ſeptiſectione, pauca etiam, ad Analytices præſtantiam, uſumque admirandum, oſtendendum, apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent: ſicut nec Meſolabium inventum eſt. At verò in Sectione 15 Cap. XVIII, Æquationes quaſdam Cubicas prælibavi;

qua

qua etiam ſolertia, alias innumeras Analytices ſtudioſus poterit comminiſci, quarum fortaſſe ope meſolabium hactenus tenebris obvolutum, in lucem tandem proferatur.

Diſtinguantur in peripheria ſeptem æquales partes ab O fine diametri literis A B C D E F G: ducantur ſubtenſæ, ſicut fit in ſchemate. Sumatur MX = MB. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT; & ad OG perpendicularis EK. Quoniam per 17 Cap. XVIII, Theor: 1, AB = AX: erunt triangula BMX, ORA, OAX, ſimilia; ideoque $\frac{OAq}{Rad.} = OX$. Sunt etiam triangula OAB,

ARM, ſimilia. Et per 47 e 1, $MA = \sqrt{q}: 4Radq - OAq$.

His ſic præmiſſis, erit RA. MA, hoc eſt, Rad. $\sqrt{q}: 4Radq - OAq :: OA. OB$. Ergo $\frac{4Radq \times OAq - OAqq}{Radq} = OBq$: quæ eſt anguli duplicatio.

Et $4Radq \times OAq - OAqq = Radq \times OBq$: quæ eſt anguli biſectio.

Deinde quia $OS = OA$. & $SA = OX$. & $NS = MX = MB$. Erit per 17 c 18. Th: 16. $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$: hoc eſt $2Rad - \frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, diviſa per OA, vel $\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC$. Et ſi addatur OA, fiet $\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ eſt anguli triplicatio.

Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ eſt anguli triſectio.

Item quia $2ET + CB = OE$. Et $MO. MB :: OC. OT$: hoc eſt $2Rad. 2Rad - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Rad}$. $\frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Rqq}$: E cujus duplo ſi tollatur OA: reſtabit $\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ eſt anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc$

+5

Cap: 19:

+5Radqq×OA=Radqq×OE: quæ eſt anguli quinquiſectio.

Atque hac forma progredi licet ad Septiſectionem inveniendam, Nempe 7Rcc × OA - 14Rqq × OAc +7Rq×OAqc+OAqqc=Rcc×OG.

Nam MO. MB :: OE. OK. Et 2OK-OC=OG. Operationem ſtudioſis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Diviſione, nihil mutat: idcircò in hiſce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus ſuis poteſtatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio iſtiuſmodi operoſæ Æquationes (in quibus non ſunt tantùm tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes) ſolvantur, quanquàm non eſt hujus inſtituti docere: tamen quod in hoc negotio in uſum nobiliſſimi doctiſſimique Domini Gerardi Aungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus ſum, in gratiam ſtudioſorum Mathematices, qua poſſum brevitate, in lucem proferre non pigebit.

SOLI DEO GLORIA.



DE ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIONE IN NUMERIS.

1. Construendæ Æquationis affectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3: pro Cq, 16: pro Dc, 125: pro Fqq, 1296: &c. Nec refert utrum numeri sumpti sint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus construenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ posterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, esto $Lqc - 5BLqq + 10CqLc - 10DcLq + 5FqqL = Gqc$. Quæ in numeris, statuendo L (radicem) 47, erit $1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782$. vel omissa *unciarum* distinctione, pro 15qq, dic BLqq, pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam si L sit 47; erit $Lq = 2209$: & $Lc = 103823$: & $Lqq = 4879681$: & $Lqc = 229345007$.

Constructionis

Constructionis hujus Practica.

BL qq	229345007	Lqc
15 × 4879681	-73195215	
Cq Lc	156149792	
160 × 103823	+ 16611680	
Dc Lq	172761472	
1250 × 2209	— 2761250	
Fqq L	170000222	
6480 × 47	+ 304560	
	170304782	Gqc

2. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam.

1qc-15qq + 160c-1250 q + 6480l = 170304782 :
Vel numeris in symbola mutatis,
Lqc-BLqq+CqLc —DcLq + FqqL = Gqc :
Et si plures essent affectionum Species, consequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Necc, & sic ulterius.

3. Radicis L ex his investigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus secundum, sive subsequens quodlibet. Quare L = A+E : & omnes potestates ex L, æqualiter consimilibus potestatibus ex A+E: v. g. Lq = Aq+2AE+Eq : & Lc = Ac+3AqE +3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numerosam hanc potestatum affectarum resolutionem cupit addiscere, eum in purarum potestatum Genesi & Analysi, bene versatum esse oportet.

4. In Æquatione propositâ, potestas resolvenda 170304782, sive Gqc, est Quadrato-cubica, cujus etiam

etiam generis sunt singulæ affectionum Species. Nam *Heterogenea inter se nec addi possunt, nec subtrahi.*

5. Quare in singulis affectionibus duo sunt considerand, Gradus affectionis, & Coëfficiens: ut in 15qq, affectionis gradus est Quadrato-quadraticus, & coëfficiens 15, lateralis: In 160 c, affectionis Gradus est cubicus, & Coëfficiens 160, Quadraticus: In 1250q, affectionis Gradus est Quadraticus, & coëfficiens 1250, cubicus: denique in 6480 l, affectionis gradus est lateralis, & coëfficiens 6480, quadrato-quadraticus: sicut ex utraque Æquationis designatione comparata clarissimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Consectaria pro laterum singularium extractione.

6. Primum Consectarium est, Si coëfficientis pro sua specie, radix, ducta in affectionis gradum, multiplicet ipsum coëfficientem: factus erit ejusdem generis cum potestate resolvenda: Ut in præcedente Æquatione, si latus 15 quadrato-quadraticè multiplicatum, ducatur in 15; & si √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & si √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique si √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex singulis hisce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus est reducendi coëfficientem quemlibet ad speciem potestatis resolvendæ*, in lateris primi singularis extractione usitatissimus.

7. Unde etiam clarissimè liquet, quod si numerus ex coëfficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor sit potestate resolvenda, latus ipsius etiam minus est latere potestatis resolvendæ; Si verò major, est majus; & si æqualis, æquale. In hac

igitur

igitur Æquatione, 1qc-15qq+160c-1250q+64801 =170304782; vel 170304782+15qq-160c+1250q -64801=1qc; ſi tum coëfficiens lateralis 15, tum √q160, tum √c1250, tum √qq6480, Quadrato-cubentur; prodibunt quatuor affectionum ſpecies homogeneæ, nempe 7593.., 3238.., 1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos facillime fit, ſatiſque pro propoſito accuratè. Operationis ratio, ex fine hujus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, ſic eſt. (Vide Sect: 27, una cum pag: 149, &c.)

Logarithmi. Numeri Coëfficientes.
1)2)3)4) ſunt dimenſiones in Coëfficiente.

Logarithmi		Numeri Coëfficientes
1) 5 × 1, 17609		15 qq
5, 88045		+ 7593..
2) 2, 20412		160 c
5 × 1, 10206.	12 65	
5, 51030		-3238..
3) 3, 09691		1250 q
5 × 1, 03220.	10 8-	
5, 16150		+ 1450..
4) 3, 81157		64801
5 × 0, 95280.	8 97	
4, 76445		-0581..

In Æquatione inter propoſitâ, ſpeciebus pro ſigno-

 rum

rum ratione in unam ſummam aggregatis, erit 170304700+759300 — 323800+145000 — 058100 =1qc=170827100. Quod etiam in aliis æquationibus ſimiliter fieri poterit.

8. Secundum eſt, Si poteſtas reſolvenda per Coëfficientem dividatur, quotus ad ipſum affectionis gradum referretur: hoc eſt, quotus erit latus, ſi affectio ſit ſub latere; vel quadratum, ſi ſub quadrato; & ſic de reliquis gradibus: Ut in priore Æquatione, ſi 170304782 dividatur per 15, quotus erit Quadratoquadraticus; ſi per 160, quotus erit cubicus; ſi per 1250, quotus erit Quadraticus; ſi denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non ſemper ipſe quotus, ſed ipſius plerumque radix pro affectionis gradu, erit latus ſingulare eliciendum.

9. In ſecundæ etiam radicis inveſtigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figurarum in quoto cenſendus fere erit ejus gradus: ut ſi quotus unicâ conſtet figura, ſit latus; Si duabus, Quadratum; ſi tribus, cubus, &c. Et ſi quotus ſuperet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortaſſe ſequentem, in grandioribus præſertim affectionibus, poterit extendi. Atque *hæ ſunt diviſionis Analyticæ leges.*

10. Nec in iſtiuſmodi *Multiplicatione* atque *Diviſione*, totam poteſtatem reſolvendam, cum toto Coëfficiente, percurrere opus erit; Sed ſolummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in reſolutione affectarum Æquationum punctationes omnes graduum fieri debent, in poteſtate reſolvendâ, ſicut in puris: Supremi quidem gradus ſupra: reliquorum verò infrà. Coëfficientes etiam,

pro suâ quisque specie, punctandi sunt. Prioris exempli punctationes sic erunt,

$$1qc - 15qq + 160c - 1250q + 064101 = 170304782$$

12. Debet autem regulariter (præsertim si Coëfficiens sit negativus) numerus punctorum in singulis esse æqualis. Quare si potestas resolvenda puncta plura, sive pauciora habeat supra se, quam Coëfficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobiq; possint esse æqualia. Et in singulis lateribus eruendis punctum coëfficientis lateri illi proprium, ad parile potestatis resolvendæ punctum superius, accommodandum est: quod quidem fiet, si unitatis locus in coëfficiente, ad puncta potestatis inferiora gradui suo convenientia, ordine dimoveantur.

13. Si Coëfficiens aliquis sit fractio, sive latus surdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et si opus sit radicis eductionem in partibus decimalibus persequi: post lineam separatricem circulos quot visum erit adscribes, eosque supra & subtus, punctis consimiliter insignire perges.

15. Tabula ostendens tum *Divisores*, tum *Gnomones*, pro laterum singularium in Æquationibus affectis investigatione; collecta & continuanda ex tabella Analytica posteriore. Et nota, quod Coëfficientis cujusque species omnes sunt affirmatæ, si ipsa sit affirmata; negatæ vero, si negata.

Pro primo Latere.	Pro lateribus singularibus sequentibus, ad complendum *Gnomonem*.					
Aq	2AE .			Eq		=Cq
BA	BE .					
Ac	3AqE .	3AEq :	Ec			=Dc
BAq	B2AE .	BEq .				
CqA	CqE .					
Aqq	4A cE .	6AqEq .	4AEc .	Eqq		=Fqq
BAc	B3A qE .	B3AEq .	B E c .			
CqAq	Cq2AE .	CqEq.				
DcA	DcE .					
Aqc	5AqqE .	10AcEq .	10AqEc.	5AEqq .	Eqc	=Gqc
BAqq	B4AcE .	B6AqEq.	B4AEc.	BEqq .		
CqAc	Cq3AqE .	Cq3AE .	CqEc.			
DcAq	Dc2AE .	DcEq .				
FqqA	FqqE .				&c.	

16. *Divisores* ubique sumuntur ex iis, quæ in data habentur mensura, justo ordine dispositis, atque aggregatis, habita signorum ratione.

17. Si Æquationis alicujus suprema potestas sit negativa, Æquatio illa est ambigua.

18. Latus singulare primum elicitur ex his *Regulis*, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. & 8.

Prima. Si Coëfficiens ita longè in posteriora decedit, ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omninò poterit.

Secunda. Si Coëfficiens in anteriora prorumpit, sitque affirmativus: devolvendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat. Per quam divisionem quotus inventus ad gradum affectionis referretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationis ambiguæ intelligi debet.

Tertia. Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis, quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa coëfficientis, pro suo genere, radix.

Quarta. Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum coëfficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Coëfficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, potestati resolvendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si affirmativus. Nam si sit Ac+CqA=Dc, erit Ac

=Dc ∓ CqA. At ſi Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Poteſtas reſolvenda è coëfficiente reducto auferatur. Nam ſi ſit CqA-Ac=Dc, erit Ac=CqA-Dc. Tum ſummæ vel differentiæ radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per diviſionem; aliquando per extractionem radicis è coëfficiente; ſed plerumque per reductionem coëfficientis inveſtigatur.

19. Atque his præceptis ſolerter perpenſis, Illud demùm verum latus ſingulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coëfficientibus, ſicut Æquationis conditio poſtulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibuſque in unam ſummam (diligente ubique tum ſignorum, tum ſedium, reſpectu habito) aggregatis; numerum profert poteſtate reſolvendâ, unde ſubtrahendus eſt, non majorem. Notandum autem eſt, quòd numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum affirmativo, tum negativo minore: ut -4 minor eſt quam 1, & quam -1. Item quod ſubductio mutat ſignum numeri ſubducendi: ut ex 4 tolle 6, reſtat 4-6, hoc eſt -2. Et ex -4 tolle -6, reſtat -4+6, hoc eſt 2. Denique ex 4 tolle -6, reſtat 4+6, hoc eſt 10. Quare in lateris primi ſingularis extractione, tentandum aliquoties eſt, donec latus verum inveneris; quod per proximè majus, certiſſimè agnoſces.

20. In conſtitutione diviſoris pro ſecundo latere inveſtigando; Coëfficientis ductæ in gradum quemlibet, ſedes ordinari debet ſecundum proprii gradus punctationem; hoc eſt, Coëfficientis ſub latere ſedes

diſtabit

distabit versus sinistram, à puncto sive sede ipsius Coëfficientis, uno loco: Coëfficientis sub quadrato sedes, duobus locis: sub cubo, tribus: &c. Et ob vitandam confusionem, utile erit in residuo potestatis resolvendæ, punctationes illas, quæ præsenti radici eruendæ inserviunt, solas distinguere.

21. Tum latus singulare secundum elicietur sic: Divisores cujusque generis, ex tabula præcedente inventi, & justo ordine dispositi, in unam summam aggregentur; & per totalem illum divisorem, reliquum potestatis resolvendæ dividatur. Nam quotus juxta divisionis Analyticæ leges (si id usus exigat) perpensus, dabit latus singulare secundum eliciendum. Cæterùm in hac investigatione multotiès, præsertim si magnitudinum dividentium negativarum aggregatum, aggregato affirmativarum penè æquetur (adeò ut Divisor Reliquo potestatis resolvendæ minor admodum sit) maxima inest lubricitas: quam tamen Analysta sagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula esto perpetua. Illud demùm verum latus singulare secundum est; quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*, constantem ex complementis cujusque generis, & Coëfficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabulam præcedentem, multiplicatis; omnibusq; in unam summam, diligente ubique tum signorum, tum sedium, habita ratione, aggregatis; qui *Gnomon* non major sit potestate resolvenda unde subtrahendus est. Quare tentandum aliquoties est, donec latus verum inveneris: quod etiam per proximè majus, certissime agnosces.

23. Latera omnia ſingularia poſt ſecundum, per Diviſionem ſimplicem facillimè acquiruntur.

24. Si affectiones ſint compoſitæ ex affirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim ſunt cum ſolertia & judicio uſurpanda. Et in lateribus æſtimandis præponderabit ſemper affectio major, minori. Verùm totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare difficillimum foret, frequens exercitatio, tum in Geneſi, tùm in Analyſi poteſtatum cujuſque generis, facile ſatis reddet, atque familiare.

25. Sed quia ſuperiùs aliquoties dictum eſt, tentatu opus eſſe; quod quidem in affectionibus multiplicibus, & ubi gradus ſunt elatiores, valde laborioſum erit: apponam hic, coronidis loco, duos modos ejuſmodi tentamenti levandi: unum per Depreſſionem, ex Cap. XVI. Sect. 7. *Clavis*: alterum per Canonem Logarithmorum 10000. In utroque autem ſi Æquatio fuerit ambigua, ſigna ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hîc eſt, quod numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum affirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum ſingularium per Depreſſionem. Si latus primum quæratur: In ſingulis Æquationis datæ ſpeciebus abſcindantur lineâ ſeparatrice omnia puncta poſt primum. Deinde applicentur omnes ſpecies ad latus; hoc eſt, deprimantur uno gradu.

Exempl: I. 1qq-72c+238600l=8725815. Hæc Deprimendo fiet 1c+2386-72q=L) 8725.
Eſto A 4. Erit 4) 8725 (2181, juſtus.

Et

Et + 64 + 238|6 — 115|2 = 187|4, minor justo.
Esto A 5. Erit 5)872|5 (174|5, justus.
Et + 125 + 238|6 — 180|0 = 183|6; major justo.
Latus igitur verum A = 5 - 1, hoc est, 4.

Exempl: II. De Æquatione ambigua. 1c-3257l = -45744. Hæc deprimendo fiet 1q-32|5 = L) -45|7.
Esto A 4. Erit 4) — 45|7 (— 11|4, justus.
Et + 16 — 32|5 = -16|5, minor justo.
Esto A 5. Erit 5) — 45|7 (— 9|1, justus.
Et + 25 — 32|5 = — 7|5, major justo.
Latus igitur verum A = 5 — 1, hoc est, 4.

Si latus secundum quæratur: In singulis speciebus abscindantur omnia puncta post secundum. Deinde applicentur omnes species ad quadratum; hoc est, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I.

1qq — 72c + 238600l = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1q + L) 238600 - 72l = Q) 8725815.
Esto A 47: erit 2209) 8725815 (3949. Justus.
Et 2209 + 5077 — 3384 = 3896. minor justo.
Esto A 48: erit 2304) 8725815 (3787. Justus.
Et 2304 + 4971 - 3456 = 3819: major justo.
Latus igitur verum est 48 — 1, hoc est, 47.

27. Inventio lateris singularis secundi per *Logarithmos*.

Index Logarithmi cujusque desumitur ex tabella in initio *Clav:* pro distantia primæ suæ figuræ, ante vel post locum unitatum, cujus Index est 0. Eædem igitur figuræ, eodem ordine dispositæ, eundem habent Logarithmum: Indices vero diversi esse possunt. Ut numeri

numeri 436, Log: eſt 2,6394865 at numeri 43600, eſt 4,6394865. & numeri 4|36, Log: eſt 0,6394865. Denique numeri 0|00436, Log: eſt $\bar{3}$,6394865.

Summa duorum Logarithmorum, Logarithmus eſt facti à valoribus: differentia autem, Logarithmus eſt quoti. Ut quia 4|36×9=39|24 hujus Log: 1,5937290=0,6394865+0,9542425. Et quia 9)39|24(4|36: hujusLog: 0,6394865=1,5937290 −0,9542425.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimenſionum cujuſq; poteſtatis, eſt ejuſdem poteſtatis Logarithmus: Ut quia numeri 436, Log: eſt 2,6394865: Erit 2,6394865×2=Log: Q: 436. Et 2,6394865×3 =C:436: Et 2,6394865×4=QQ: 436. &c.

Logarithmus poteſtatis cujuſque diviſus per numerum dimenſionum ſuarum, exhibet Logarithmum radicis ſuæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo ſecundi, reliquus erit Logarithmus rationis: qui, ſi in numerum terminorum minus uno (qui numerus eſt rationum) ducatur; deindeq; Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia ſatis ſunto: quibus intellectis, reliquam operationem, exempla ſequentia diligenter inſpecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, poſt duas primas, linea ſeparatrice abſcindendæ ſunt.

Ex-

Exempl:I. 1qq-72c+238600l=8725815. Juftus. Sunto duo prima latera fingularia.

		-72	+238600
47.	1, 67209 8	1,85733	5,37767
Cu:	5, 01629	5,01629	1,67210
QQ:	6, 68839	6,87362	7,04977
	+4880...	-7475...	+11213...

Et+4880... +11213... -7475... =+8618... minor jufto.

48.	1,68124 1	1,85733	5, 37767
Cu.	5,04372	5,04372	1, 68124
QQ.	6,72496	6,90105	7,05891
	+ 5308...	-7963...	+ 11455...

Et+5308+11455-7963 =+8800... major jufto. Radix igitur vera erit 48-1, hoc eft, 47.

Exempl:II. 1c-32571=-45744. Juftus. Sunto duo prima latera fingularia

		-3257
48.	1,68124 1	3,51282
Cu.	5,04372	1,68124
	+ 1106	5,19406
		-1563

+1106 -1563 =-457, minor jufto,(faltem non major.)

49.	1,69019 6	3,51282
Cu.	5,07059	1,69020
	+1176	5,20302
		-1596

+1176 -1596 =-420; major jufto.
Radix igitur vera erit 49 -1, hoc eft, 48.

Latus secundum investigari poterit per Logarithmos, etiam Depressione præcedente. Ut in Exemplo V. 1qq —1246(209q=08972(6256. Hæc quadraticè depressa fiet 1q— 1246=Q) 8972(6.

Supponatur duo prima latera singularia,

		8972'6
34.	1,53148	3,95337
Q.	3,06296	3,06296
+	1156	0,89041: valor 7(76 Justus.

+1156 —1246=-90: minor justo.

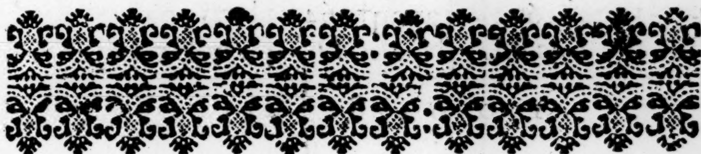
36.	1,55630	3,95337
Q.	3,11260	3,11260
+	1296	0,84077: valor 6(93 Justus.

+ 1296 —1246=+50: major justo.

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modò in XXVIII Sectionibus, sive Præceptis (qui numerus est perfectus) doctrinam de Æquationum affectarum resolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur sit omnis laus, honor, & gloria in sempiternum. AMEN.

Exempla



Exempla quædam Æquationum Resolutarum in Numeris.

ÆQuationum Quadraticarum, omniumque in quibus sunt tres species in ordine scalæ æqualiter adscendentes, Analysi supersedebo: quia in cap. XVI. Sect. 9. *Clavis*, modus facilior traditus est, quàm per generalem hanc methodum præstari poterit: Et ad Exempla Æquationum aliter affectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, subjungam; in quibus operationis ratio, in laterum singularium investigatione, ex præceptis superiùs traditis, aperietur.

Initium faciam à Resolutione numerosæ Æquationis primò constitutæ, Nempe

1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782.

Hoc est, Lqc -- BLqq + CqLc - DcLq + FqqL = Gqc

Exemplum

Exemplum I.

1qc-15qq+160c —1250q+064801 =170304782.
Hoc est, Lqc-BLqq+CqLc-DcLq+FqqL =Gqc.

	1703	04782	(47
	1	5	—B
	1	250	—Dc
	1	60	Cq
		6480	Fqq
	1024		Aqc
	102	40	CqAc
	2	5920	FqqA
+	1128	9920	
	384	0	—BAqq
	20	000	—DcAq
	—404	000	
	724	9920	*Ablatit.*
R	978	05582	
	128	0	5Aqq
	6	40	10Ac
		160	10Aq
		20	5A
	7	680	Cq3Aq
		1920	Cq3A
		160	Cq
		6480	Fqq

+142	50040	
38	40	-B4Ac
1	440	-B6Aq
	240	-B4A
	15	-B
1	0000	-Dc2A
	1250	-Dc
—40	87665	
+101	62375	*Divisor.*
896	0	5AqqE
313	60	10AcEq
54	880	10AqEc
4	8020	5AEqq
	16807	Eqc
53	760	Cq3AqE
9	4080	Cq3AEq
	54880	CqEc
	45360	FqqE
+1333	62047	
268	80	-B4AcE
70	560	-B6AqEq
8	2320	-B4AEc
	36015	-BEqq
7	0000	-Dc2AE
	61250	-DcEq
-355	56465	
+978	05582	*Ablatit.*

Exemplum

Exemplum II.

$1c + 4200000l = 247651713$

Hoc est, $Lc + CqL = Dc$.

	247651713	(417	
	4200000	Cq	
	64	Ac	
	1680000	CqA	
	2320000	*Ablatit.*	
R	15651713		
	48	3Aq	
	12	3A	
	4200000	Cq	
	9120000	*Divisor.*	
	48	3AqE	
	12	3AEq	
	1	Ec	
	4200000	CqE	
	9121000	*Ablatit.*	
R	6530713		
	50430	3Aq	4	1
	123	3A	16	8
	4200000	Cq	1
	9255300	*Divisor.*	1681
	353010	3AqE	
	6027	3AEq	
	343	Ec	
	2940000	CqE	
	6530713	*Ablatit.*	

Exem-

Exemplum III.

1C + 1007Q = 247617936,

Hoc est, Lc + BLq = Dc.

	2 4 7	6 1 7	9 3 6	(417
	1 0	0 7		B
	6 4			Ac
	1 6 1	1 2		BAq
	2 2 5	1 2		*Ablatit.*
R	2 2	4 9 7	9 3 6	
	4	8		3Aq
		1 2		3A
	8	0 5 6		B2A
		1 0 0	7	B
	1 3	0 7 6	7	*Divisor.*
	4	8		3AqE
		1 2		3AEq
		1		Ec
	8	0 5 6		B2AE
		1 0 0	7	BEq
	1 3	0 7 7	7	*Ablatit.*
R	9	4 2 0	2 3 6	
		5 0 4	3	3Aq
		1	2 3	3A
		8 2 5	7 4	2BA
		1	0 0 7	B
	1	3 3 2	2 7 7	*Divisor.*
	3	5 3 0	1	3AqE
		6 0	2 7	3AEq
			3 4 3	Ec
	5	7 8 0	1 8	B2AE
		4 9	3 4 3	BEq
	9	4 2 0	2 3 6	*Ablatit.*

	4	1
1 6		
	8	
		1
1 6	8	1

Exemplum IV.

1qq--44299005l=0222520086

Lqq — Dc L=Fqq.

0	2225	2086	(354
--44	2990	05	—Dc
+81			Aqq
--132	8970	15	—DcA
--51	8970	15	*Ablatit.*
R 52	1195	3586	
10	8		4Ac
	54		6Aq
	12		4A
+11	352		
--4	4299	005	—Dc
+6	9220	995	*Divisor.*
54	0		4AcE
13	50		6AqEq
1	500		4AE
	625		Eqq
+69	0625		
--22	1495	025	—DcE
+46	9129	975	*Ablatit.*
R 5	2065	3836	
+1	2793	7395	*Divisor.*
+5	2065	3836	*Ablatit.*

Exemplum

Exemplum V.

1qq-124600q=089726256, Lqq-CqLq=Fqq.

0	8 9 7 2	6 2 5 6	(354
-1 2	4 6 0 0		-Cq
+8 1			Aqq
-1 1 2	1 4 0 0		-CqAq
-3 1	1 4 0 0		*Ablatit*
R 3 2	0 3 7 2	6 2 5 6	
1 0	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
+1 1	3 5 2		
7	4 7 6 0 0	0	-Cq2A
	1 2 4 6	0 0	-Cq
-7	6 0 0 6	0	
+3	7 5 1 4	0 0	*Divisor*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq
+6 9	0 6 2 5		
3 7	3 8 0 0	0	-Cq2AE
3	1 1 5 0	0 0	-CqEq
-4 0	4 9 5 0	0 0	
+2 8	5 6 7 5	0 0	*Ablatit*
R 3	4 6 9 7	6 2 5 6	
	8 4 8 9	1 8 0 0	*Divisor*
+3	4 6 9 7	6 2 5 6	*Ablatit*

 Exemp. VI.

Exemplum VI.

$1qq - 340c = 621066096$

$Lqq - BLc = Fqq.$

6	2 1 0 6	6 0 9 6	(354
--3	4 0		--B
†8 1			Aqq
			BAc
--9 1	8 0		*Ablatit.*
--1 0	8 0		
R 1 7	0 1 0 6	6 0 9 6	
1 0 8			4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
† 1 1	3 5 2		
9	1 8 0		-B3Aq
	3 0 6 0		-B3A
	3 4	0	-B
--9	4 8 9 4	0	
† 1	8 6 2 6	0	*Divisor.*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq
† 6 9	0 6 2 5		
4 5	9 0 0		-B3AqE
7	6 5 0 0		-B3AEq
	4 2 5 0	0	-BEc
-- 5 3	9 7 5 0	0	
† 1 5	0 8 7 5	0	*Ablatit.*
R 1	9 2 3 1	6 0 9 6	
†	4 6 9 2	9 0 6 0	*Divisor.*
† 1	9 2 3 1	6 0 9 6	*Ablatit.*

Exemplum VII.

1qq − 771080001 = 085530576 Lqq − Dc L = Fqq.

	0	8 5 5 3	0 5 7 6	(426
	−− 7 7	1 0 8 0	0 0	−Dc
	+ 2 5 6			Aqq
	−− 3 0 8	4 3 2 0	0 0	−DcA
	−− 5 2	4 3 2 0	0 0	*Ablatit.*
R	5 3	2 8 7 3	0 5 7 6	
	2 5	6		4Ac
		9 6		6Aq
		1 6		4A
	+ 2 6	5 7 6		
	−− 7	7 1 0 8	0 0 0	−Dc
	+ 1 8	8 6 5 2	0 0 0	*Divisor.*
	5 1	2		4AcE
	3	8 4		6AqEq
		1 2 8		4AE
		1 6		Eqq
	+ 5 5	1 6 9 6		
	−− 1 5	4 2 1 6	0 0 0	−DcE
	+ 3 9	7 4 8 0	0 0 0	*Ablatit.*
R	1 3	5 3 9 3	0 5 7 6	
	+ 2	2 0 3 0	4 0 8 0	*Divisor.*
	+ 1 3	5 3 9 3	0 5 7 6	*Ablatit.*

4 . 2
1 6
1 6
4
1764

4 . . 2
646 8
948
74088

Exemplum VIII.

32001 L — 1c = 46577. Æquatio est ambigua.

CqL — Lc = Dc

46	577		(47 *Radix major.*
32	00	Cq	
--64		-Ac	
+128	00	CqA	
+64	00	*Ablatit.*	
R -17	423		
4	8	-3Aq	
	12	-3A	
-49	2		
+32	00	Cq	
--17	20	*Divisor.*	
33	6	-3AqE	
5	88	-3AEq	
	343	-Ec	
--39	823		
+22	400	CqE	
-17	423	*Ablatit.*	
R 00	000		

Exempl.

Exemplum IX.

$32001 - 1c = 46577$

46	577	Dc	(157 *Radix minor.*
32	00	Cq	
--1		Ac	
+32	00	CqA	
31	00	*Ablatit.*	
R 15	577		
	3	3Aq	
	3	3A	
--	33		
+3	200	Cq	
2	870	*Divisor.*	
1	5	-3AqE	
	75	-3AEq	
	125	-Ec	
--2	375		
+16	900	CqE	
13	625	*Ablatit.*	
R 1	952	000	
	252	05	*Divisor.*
	745	107	*Ablatit.*
R 1	206	893	000 &c.

Exemplum X.

$5\dot{3}\,q - 1\,c = 1\,\dot{3}\,2\,5\,\dot{4}$ Æquatio est ambigua.

$BLq - Lc = Dc$

1 3	2 5 4	(47	Radix major.
5	3	B	
—6 4		-Ac	
+ 8 4	8	BAq	
+ 2 0	8	*Ablatit*	
R --7	5 4 6		
4	8	-3Aq	
	1 2	-3A	
--4	9 2		
4	2 4	B2A	
	5 3	B	
+ 4	2 9 3		
—	6 2 7	*Divisor*	
3 3	6	-3AqE	
5	8 8	-3AEq	
	3 4 3	-Ec	
--3 9	8 2 3		
2 9	6 8	B2AE	
2	5 9 7	BEq	
+ 3 2	2 7 7		
--7	5 4 6	*Ablatit*	
R.	0 0 0 0		

Exem. XI.

Exemplum XI.

$53q - 1c = 13254$

13254	Dc (20.05 Radix minor.				
53	B				
--8	-Ac				
212	BAq				
132	*Ablatit.*				
R	54	000	000		
	--12	0000	0	--3Aq	
		--6	00	--3A	
	--12	006	00		
	21	200		B2A	
		5	3	B	
	+21	205	3		
	9	199	30	*Divisor.*	
	--60	000	0	--3AqE	
	--	150	00	--3AEq	
			125	--Ec	
	--60	150	125		
	106	000		B2AE	
		132	5	BEq	
+	106	132	5		
	45	982	375	*Ablatit.*	
R	8	017	625	000 &c.	

Exemplum XII.

600341 – 1 c = 1023768

CqL – Lc = Dc.

	1	023	768	(236	Radix major.
	6	003	4	Cq	
	–8			-Ac	
	+12	006	8	CqA	
	+4	006	8	*Ablatit*	
R	-2	983	032		
	1	2		-3Aq	
		6		-3A	
	--1	26			
	+	6003	4	Cq	
	–	659	66	*Divisor*	
	3	6		-3AqE	
		54		-3AEq	
		27		Ec	
	-4	167			
	+1	801	02	CqE	
	-2	365	98	*Ablatit*	
R	--	617	052		
		--96	366	*Divisor*	
		617	052	*Ablatit*	

Exem. XIII.

Exemplum XIII.

600341 - 1C = 1023768

(171 5 Radix minor.

1023768

600 34 Cq

-1 -Ac

\+ 600 34 CqA

† 599 34 *Ablatit*

R 424 428

3 --3Aq

3 --3A

\- 33

\+ 600 34 Cq

597 04 *Divisor*

21 --3AqE

147 --3AEq

343 --Ec

\- 3913

\+ 420 238 CqE

\+ 416 325 *Ablatit*

R + 8 103 000

5916 19 *Divisor*

6016 189 *Ablatit*

R 2 086 811 000

591 562 57 *Divisor*

1775 556 903 *Ablatit*

R 311 254 097 000

59 153 637 91 *Divisor*

295 767 161 625 *Ablatit*

R 15 486 936 375 000 &c.

Exemplum XIV.

1qq--72c+2386001=87258157056

Lqq--BLc+DcL=Fqq.

872	5815	7056 (476	
--7	2	--B	
+228	600	Dc	
256		Aqq	
954	400	DcA	
+1210	400		
--460	8	BAc	
+749	600	*Ablatit.*	
R 122	9815	7056	
25	6	4Ac	
	96	6Aq	
	16	4A	
23	8600	Dc	
+50	4360		
34	56	--B3Aq	
	864	--B3A	
	72	--B	
--35	4312		
+15	0048	*Divisor.*	
179	2	4AcE	
47	04	6AqEq	
5	488	4AEc	
	2401	Eqq	
167	0200	DcE	
+398	9881		
241	92	-B3AqE	
42	336	-B3AEq	
2	4696	-BEc	
--286	7256		
112	2625	*Ablatit.*	
R 10	7190	7056	
1	7698	808	*Divisor.*
107	190	7056	*Ablatit.*

Exempl. XV

Exemplum XV. Trisectionis.

3l − 1c = 1(2586407821 00 CqL − Lc = Dc.

```
 1|2 5 8 6 4 0|7 8 2 1        (0,4499
  3     Cq              —— Subtensa
 - 6 4-Ac                  Gr: 26.
+ 1 2   CqA
 1|1 3 6  Ab|latit.
R |1 2 2|6 4 0
         4|8    -3Aq
          |1 2  -3A
       -4|9 2
        +3      Cq
   2 5|0 8      Divisor
     1 9|2      -3AqE
       1|9 2    -3AEq
          6 4   -Ec
 - 2 1|1 8 4
+ 1 2           CqE
     9 8|8 1 6  Ablatit
R    2 3|8 2 4|7 8 2
        2|4 1 7|8 8   Divisor
     2 1|6 6 5|1 5 1  Ablatit
R       2|1 5 9|6 3 1|1 0 0
         |2 3 9|5 0 6|2 3   Divisor
        2|1 5 4|5 8 5|5 0 1 Ablatit
R        |0 5 0|4 5 5|9 9|0 0 0
```

Exem. XVI.

Exemplum XVI. Quinquisectionis.

1qc-5c+5l = 1,147152872702092

Lqc-CqLc+FqqL = Gqc.

(0,2437 Subtensa Gr: 14.

1	14715	28727	02092
†	5	Fqq	
	-5	-Cq	
	32	Aqc	
		FqqA	
1	0		
+1	00032		
	-40	CqAc	
	96032	*Ablatit*	
R	18683	28727	
	8	0	5Aqq
		80	10Ac
		40	10Aq
		10	5A
	5		Fqq
	+5008	8410	
	60		-Cq3Aq
	30		-Cq3A
		5	-Cq
	-630	5	
	+4378	3410	*Divisor*
	32	0	5AqE
	4	80	10AEq
	2	560	10AqEc
		2560	5AEqq
		1024	Eqc
	20		FqqE
†	20039	62624	

	240		-Cq3Aq	E
	480		-Cq3AE	q
	32	0	CqEc	
	-2912	0		
	17127	62624	*Ablatit.*	
R	1555	66103	02092	
	414	9122		*Divisor.*
	1242	65012	09443	*Ablatit.*
R	313	01090	92649	00000

Notæ

Notæ in Exempla præcedentia.

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Justum voco eum, qui oritur ex applicatione potestatis Resolvendæ ad gradum lateris suppositi, per quem facta est Depressio. Hæc enim mensura est, cui reliquæ species omnes legitimè aggregatæ, deberent esse æquales. Ut in Exemplo 1° Sectionis 26, 1c + 238,6 − 7,2q = L) 872,5. Si pro latere primo supponatur 5: Oportet esse C: 5: + 238,6 − 7,2Q: 5: = 872,5 divisum per 5: hoc est 125 + 238,6 − (7,2 × 25) 180, nempe 183,6 æqualem esse 174,5 Justo. At major est: ideoque latus verum minus est quàm 5. Supponatur igitur iterùm 4: Et periculum fac, an C: 4: + 238,6 − 7,2Q: 4: æquetur 872,5 diviso per 4.

Cæterùm nè in his Exemplis, sicut etiam in sequentibus, tentamenta hæc casu merè fortuito suscipiantur; Monendum erit.

Primò, si lateris eruti homogenea potestas excedat potestatem Resolvendam; vel, si magnitudines augentes potestatem Resolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimùm) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, 1 2 + 260000l = 180931713.

Secundò, Si Divisores sub eodem signo cum Reliquo potestatis Resolvendæ, excedant eos, qui sunt sub signo diverso: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: sin aliter, majus: Ut in hac Æquatione,

tione, 1568 l — 1c = 2 1 9 5 2. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum potestatis Resolvendæ est affirmativum: ut in hac Æquatione, 6768 l — 1c = 214273. Harum trium Æquationum solutio in praxi, post Notas ostendetur.

Tertiò, Si post hæc Monita, nihilominus subsit dubitatio; tentamentum à 5 commodissimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquisitio: sive ea per Depressionem fiat, sive per Logarithmos.

His præmonitis, restat ut Exempla ipsa discutiamus.

Ad Exempl: I. √qc1703 est 4 †, per Sect: 18, Reg: 1. Nam ut ex Sect: 7. apparet, per Coëfficientes Analyticè reductos, non fit in primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum minus est quàm Quotus 9: quia Divisores sub signo + (quod signum est ipsius Residui) excedunt eos qui sunt sub signo —.

Ad Exempl: II. 42) 247(6—, per Sect: 18, Reg: 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect: 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Estque Latus A verum minus quàm 6; quia C: 6— : excedit 247(6.

Ad Exempl: III. 10) 247 (24+ = Q: 5— : per Sect: 18, Reg: 2. At 10 Q: 5: = 250 ⊏ 247(6. monit: 1.

Ad Exempl: IV. √c44(3 est 3 +, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quàm Quotus 8—, per Monit: 2.

Ad Exempl: V. $\sqrt{q}\,12\llcorner 4$ eſt 3 +, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9 -, per Monit: 2.

Ad Exemp: VI. Coëfficiens lateralis $3\llcorner 4$ quadrato-quadraticè multiplicatus, & auctus $6\llcorner 2$, fit 140, QQ: 3+: per Sect: 18, Reg: 4. quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9 —, per Monit: 2.

Ad Exempl: VII. $\sqrt{c}\,77$ eſt 4, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum eſt 4.

Ad Exempl: VIII. $\sqrt{q}\,32$ eſt $5\llcorner 65$, in 32 fit $180\llcorner 8$ mi $46\llcorner 5$, reſtat 144, C: 5: per Sect: 18, Reg: 4. At 144 excedit $46\llcorner 5$. Quare Latus A verum minus eſt quàm 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 10, per Monit: 2.

Ad Exempl: IX, XI, XIII. Solutio facillima eſt per Diviſionem, juxta Sect: 18, Reg: 3.

Ad Exempl: X. C: 5: eſt 125, mi 13, reſtat 112, C: 5 —: per Sect: 18, Reg: 4, At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus eſt quam 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 12, per Monit: 2.

Ad Exempl: XII. $\sqrt{q}\,6$ eſt 2 +, in 6 fit 12, mi 1, reſtat 11, C: $2\llcorner 5$ per Sect: 18, Reg: 4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2 +, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quàm quotus 5 -, per Monit: 2.

Ad

Ad Exempl: XIV. QQ: 7(2: est − 2687. Et √c238(6 est 6(2, cujus QQ est + 1480. Tum − 2687 + 1480 = − 1207: Hic additus ad 872, dat 2079, QQ: 6+: per Sect: 18, Reg: 4. Et quia adjectitius − 2687 major est quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quam Quotus 9, per Monit: 2.

Ad Exempl: XV, XVI, Quia in utroque Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur; nec obstant Coëfficientes etiam reducti, Analysis per Divisionem fiet, juxta Sect: 18, Reg: 1.

Praxis Exempli in Monito primo.

1c+26,0000=180931713.

1809 (4, latus A

260 Cq.

√q26 est 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, restat 50, C:3+: qui minor est quam 180. Quare latus A verum majus est quàm 3.

Praxis Exempli in Monito secundo.

15681-1c=21952

2 1	9 5 2	(28, Duo prima latera.
1 5	6 8	Cq
--8		Ac
+ 3 1	6 3	CqA
+ 2 3	3 6	*Ablat*
R - 1	40 8	
1	2	-3Aq
	6	-3A
- 1	2 6	
+ 1	5 6 8	Cq
+	3 0 8	*Divisor*

Signum R est -. At - 1,26 minor est quam + 1,568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis

Praxis Exempli posterioris in Monito secundo.

67681 - 1c = 214273

214	273	(47, Duo prima latera.
67	68	Cq
-64		-Ac
+270	72	CqA
+206	72	*Ablat*
R+7	553	
4	8	-3Aq
	12	-3A
-4	92	
+6	768	Cq
+1	848	*Divisor*

Signum R est +. At Divisor ex A lateris gradibus negativus, minor est Divisore Coëfficiente affirmativo; hoc est --4(92 minor est quam + 6(768. Quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

De Logarithmis.

In Sectione XXVII. Logarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed satis luculentèr præsertim pro tribus prioribus Numerationis speciebus, scilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, si Indices sint affirmativi, à communi integrorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

Inventio

Inventio fractionum $\left\{ \begin{matrix} 13. & 1,11394. \\ 17. & 1,23045. \end{matrix} \right.$ Et $\left\{ \begin{matrix} 15. & 1,17609 \\ 32. & 1,50515 \end{matrix} \right.$

Log: $\bar{1}$,88349 Log: $\bar{1}$,67194

Additio.

Ad	$\bar{1}$, 8 8 3 4 9
adde	$\bar{1}$, 6 7 1 9 4
Sum	1, 5 5 5 4 3

Subductio.

Ex	$\bar{1}$, 8 8 3 4 9
tolle	$\bar{1}$, 6 7 1 9 4
Rest	0, 2 1 1 5 5

Multiplicatio.

Lateris 0|0 0 6 4
3 * $\bar{3}$, 8 0 6 1 4
Cubus $\bar{7}$, 4 1 8 4 2

Lateris 0|0 0 6 4
2 * $\bar{3}$, 8 0 6 1 4
Quadr: 5, 6 1 2 2 8

Divisionis Logarithmi Indicem habentis negativum, per 2, 3, 4, 5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

Divisores.		
2)	1 . 2	1
	3 . 4	2
	5 . 6	3
	7 . 8	4
3)	1 . 2 . 3	1
	4 . 5 . 6	2
	7 . 8 . 9	3
4)	1 . 2 . 3 . 4	1
	5 . 6 . 7 . 8	2
5)	1 . 2 . 3 . 4 . 5	1
	6 . 7 . 8 . 9 . 10	2
&c	40 . 30 . 20 . 10 . 0	

In

In hac Tabella Divisores sunt à sinistrâ intra lineam flexam.

Tum versûs dextram sequuntur Logarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in singulis ordinibus collaterales adstant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtùs autem qui scribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Ostendunt numeros addendos primæ figuræ Logarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur supra in eâdem columnâ, juxta Divisorem. Ut si Logarithmus $\bar{7}$, 41842 postuletur dividi per 3: Quæratur $\bar{7}$ juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro Indice Quoti: Et numerus 20 subtùs; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipsum 24: in quo Divisor 3 octiès continetur.

Divisio.

3) $\underline{7}$, 4 1 8 4 2	2) $\bar{5}$, 6 1 2 2 8
Latus $\bar{3}$, 8 0 6 1 4	Latus, $\bar{3}$, 8 0 6 1 4

FINIS.

K with precedy 5

ELEMENTI DECIMI

EUCLIDIS

DECLARATIO.

Necnon

De SOLIDIS REGULARIBUS

TRACTATUS.

Authore

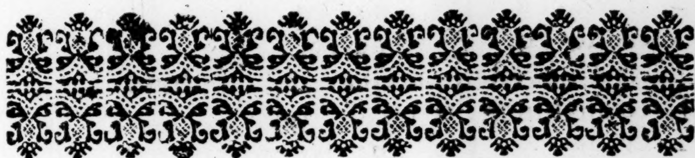
GUILELMO OUGHTREDO

ANGLO.



OXONIÆ,
Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt
apud THO. ROBINSON. *Anno*
Dom. 1652.

A
M
M
N
N
Pr
Ma
Co
Co
Inc
Co
Inc
Ra
Irr
Me
Lin
8
Maj
Min
Z e
X e



Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor:

Æquale =. Simile *Sim.*
Majus ⊏. Proxime majus □‾.
Minus ⊐. Proxime minus _□.
Non majus ⊏̸. Æquale vel minus ⊑.
Non minus ⊐̸. Æquale vel majus ⊒.
Proportio, sive ratio æqualis ::
Major ratio ‾∴‾. Minor ratio _.._.
Continuè proportionales ∸∴∸.
Commensurabilia ⊓.
Incommensurabilia ‵⊓.
Commensurabilia potentiâ ⊓̶.
Incommensurabilia potentiâ ‵⊓̶.
Rationale, ῥητὸν, R, vel ⊬.
Irrationale, ἄλογον, ‵⊬.
Medium sive mediale *m*⌐
Linea secta secundum extremam & mediam rationem } ς
Major ejus portio σ
Minor ejus portio τ.
Z est A + E. ζ est a + e.
X est A-E. ξ est a-e

Z est Aq+Eq. ʒ est aq + eq.
X est Aq-Eq. ꝸ est aq-eq.
Æ est AE Erectang. æ est a e rectangulum.
▯ rectangulum. ▫ quadratum.
△ Triang. ♃ latus, sive radix.
⫛ media proportionalis.
∽ est differentia duarum magnitudinum, ut B ∽ C significet vel B-C, vel C-B. in 113, 114 e 10.

ELEMENTI



ELEMENTI DECIMI *EVCLIDIS* Declaratio.



AD def: 1. Eandem menſuram duas magnitudines metiri, tum dicit, quando ipſarum quoti menſuras certas, & veris numeris explicabiles habent. Commenſurabiles igitur magnitudines ſunt, quarum ratio in veris numeris dari poterit: quales ſunt in genere quadratico, radices quadratæ planorum ſimilium: & in genere cubico, radices cubicæ ſolidorum ſimilium. Exempli gratiâ, in planis 18 & 50, nempe 3×6, & 5×10, ſimilibus (eſt enim 3.6::5.10) √q 18, & √q50 ſunt latera cõmenſurabilia; quia diviſa per √q2 maximam eorum communem menſuram, dant √q 9 & √q 25, hoc eſt 3 & 5. Sunt igitur √q 18 & √q 50 in ratione 3 ad 5. Quippe 18 & 50 ſunt ut Q. Q.

Ad def: 2. √q 12 & √q 64 ſunt latera incommenſurabilia: nam quamvis ad minores terminos poterint reduci per √q 4 maximam eorum communem menſuram; fientque √q 3 & √q 16: non tamen

men dicuntur commenſurabilia; quia non ſunt ut numerus ad numerum. Eſt enim √q 3 numerus non verus, ſed ſurdus. Quippe 12 & 64 non ſunt ut Q. Q.

Ad def: 3. At vero linearum ſive laterum √q 12 & √q 64, quadrata 12 & 64 ſunt commenſurabilia; quia area 1 utrumque metitur: nam area 12, aream 1 continet duodecies; & area 64, ipſam aream 1, continet ſexagies & quater. Quare quadrata illorum laterum ſunt in ratione 12 ad 64. Atque hinc ſequitur, quod omne latus ſurdum generis quadratici numero rationali, ſive vero cuicunque, potentiâ eſt commenſurabile: modo ſi intelligantur ejuſdem eſſe generis ſive dimenſionis: At ſi unum ex iis intelligatur eſſe latus ſive linea, & alterum planum ſive ſuperficies, non erunt commenſurabilia potentiâ.

Ad def: 4. Sunt igitur lineæ potentiâ incommenſurabiles diverſorum generum: nempe una lateralis, altera quadratica; vel una quadratica, altera quadratoquadratica. Exempli gratia, laterum √q 3 & √q 2 quadrata ſunt 3 & 2: & inter ipſa planum medium proportionale √q 6. Quare plana ſive potentiæ 3 & 2 incommenſurabilia ſunt ad planum √q6. Ideoque ipſorum latera √q3 & √q 2 ad √qq6 ſunt incommenſurabilia etiam potentiâ.

√q3.		√q2.
3.	√q6.	2.
√q3.	√qq6.	√q2.

Atque hujuſmodi media proportionalia tum plana, tum latera, Euclides poſtea Media ſive Medialia nuncupat.

Ad def. 5. Si linea propoſita vero numero ſit explicabilis; omnes lineæ veris numeris explicabiles

ſunt

sunt ipsi commensurabiles. Si verò linea proposita sit latus surdum, puta √q 3, linea illi quacunque ratione commensurabilis invenitur per proportionem. Ut si ratio data sit 2 ad 5 : Dic 2. 5:: √q3. √q $\frac{75}{4}$.

Dicitur ῥητὴ, sive rationalis, linea vero numero explicabilis ; ratione cujus aliæ lineæ ad ipsam comparatæ, considerantur vel commensurabiles vel incommensurabiles, idque longitudine vel potentiâ.

Atque his bene perspectis, reliquæ definitiones nihil habebunt difficultatis.

Sequuntur Lemmata.

1. Rectangulum sub ɤ & ʕɤ est ʕɤ. Nam irrationalium aggregatio quantacunque non mutat speciem.

2. Si linea *Z* secetur inæqualiter in A & E, erit Z-2AE=Xq. Et Z+2AE=Zq.

3. Si linea *Z* componatur tum ex A+E, tum ex a+e : erit Z-$\mathfrak{z}_1$=2æ-2Æ. Nam Z+2Æ=$\mathfrak{z}_1$+2æ.

Item, si linea X constituatur tum ex A-E, tum ex a-e : erit Z-$\mathfrak{z}_1$=2Æ-2æ Nam Z-2Æ=$\mathfrak{z}_1$-2æ.

4. A.E::Aq.Æ::Æ. Eq.

5. Si A & E sint ⅂ : erunt 1°, Aq, Eq, Z, X ⊓ : ideoque simul ɤ vel *m*ɤ.

Erunt 2°, Aq, Eq, Z, X ⊓ 2Æ. per 4.

Erunt 3°, Z, 2Æ, Zq, Xq ⊓

Erunt 4°, X, 2Æ, Zq, Xq ⊓. Nam Zq=Z+2Æ: & Xq=Z-2Æ. & Zq=4Æ+Xq.

6. Si A & E ⅂, erunt Aq, Eq, Zq, Æ, Z, X, Xq ⊓.

Propoſitiones Elementi X^{i}.

9. Novem priores propoſitiones docent lineas commenſurabiles eſſe, ut numerus ad numerum, atq; ideo eorum quadrata eſſe, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. In incommenſurabilibus autem contra eſſe. Earum enim quadrata non ſunt ut Q.Q. √q45 & √q20 ſunt lineæ commenſurabiles, quia ipſarum quadrata 45 & 20 ſunt ut 9 & 4, numeri quadrati, quorum radices ſunt 3 & 2, ſunt igitur √q45 & √q20 in ratione 3 ad 2.

Coroll: ad 9. Lineæ ⊓ ſunt etiam ⊐: at non contra. Sed lineæ '⊓ non ſunt idcirco '⊐.

10. Si ſit B.C::D.F. ſintque B, C ⊓ vel '⊓: etiam D,F ⊓ vel '⊓ erunt.

12.14. Si B ⊓ C, & C, D ⊓ vel '⊓, etiam B,D ⊓ vel '⊓ erunt.

13. Si B⊓D; & C'⊓D: erit B'⊓ C.

Coroll: ad 14. Si B '⊓ C; at B ⊓ D, & C ⊓ F: erit D'⊓F.

16.17. A,E,Z ſunt ſimul ⊓ vel '⊓.

11. Invenire B, D '⊓ : & B, C '⊐. Sumantur duo aliqui numeri 3 & 2, qui non ſint ut Q.Q. fiatque 3.2::B.F: Item B.D::D.F. Quare B.F::Bq.Dq. At B,F non ſunt Q.Q: ideoque nec Bq.Dq ſunt ut Q.Q. Ergo B,D '⊓ per 9.

Iterum fiat B.C::C.D: ſunt igitur Bq,Cq '⊓: quare B,C '⊐. √q 3. √qq 6. √q 2.

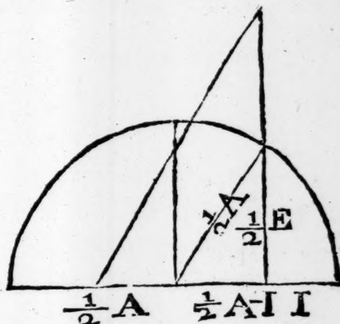
Coroll: ad 11. ɱ inter duas '⊓, eſt utrivis ipſarum '⊐; & ꭈ, ſi alterutra ex iis ſit ꭈ.

15. Si ſit A, E:: a. e. & ſit A ⊓ √q: Aq-Eq; ſcil.

X:

X: erit etiam a ⊏⊐ √q: aq-eq: scil. ☊. Nam Aq. Eq::aq. eq: quare Aq. Aq-Eq::aq.aq-eq. Ergo per 10.

18.19. Si sint duæ lineæ A & E: adplicetur autem ad A rectangulum æquale quadrato semissis E, deficiens figura quadrata: hoc est, dividatur A in duas partes A-I & I, sic ut []^{m} segmentorum æquetur □^{o} $\frac{1}{2}$E; nempe AI-Iq=$\frac{1}{4}$Eq. & sint segmenta A-I & I ⊏⊐. Erit etiã A ⊏⊐ √q: Aq-Eq. & conversè: & contra. Nã per 47 e 1, $\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq=Q: $\frac{1}{2}$A-I: quare √q: Aq-Eq: est A-2I. At per 16 & hypoth. A-2I, & A sunt ⊏⊐.



22.23. Ex A, E ῥ ⊏⊐ fit Æ ῥ, scil. *mr*: & √qÆ, est ῥ & *mr*, (vide annotata ad def. 4). Nam A. E:: Aq. Æ. quare Æ ⊏⊐ Aq ῥ, erit ῥ. Est etiam *Æ mr*. Nam si A sit √q3, & E √q2; erit Æ √q6 planum, cujus radix est √qq6. At vero tum quadrata 3, √q6, 2; tum ipsorum radices √q3, √qq6, √q2 sunt ∺ & in neutris medius terminus est ejusdem rationis sive commensurationis cum suis extremis, sed utrique incommensurabilis.

24. Si B sit ⊏⊐ saltem ipsi C *mr*, erit etiam B *mr*. Nam ad expositam R per 23, fiat RD=Cq *mr*, & RF=Bq. Quare RD ⊏⊐ RF: ideoque F, D ῥ ⊏⊐. Est autem per 23, R ⊏⊐ D: idcirco etiam R ⊏⊐ F. Ergo Bq *mr*: atque ipsa B *mr*.

20,21.25. Ex A, E ῥ ⊏⊐, fit Æ similiter ῥ: & conversè

versè. Et ex A, E mῥ ⊏, fit Æ mῥ : & conversè. Nam A.E::Aq. Æ. At Aq est ῥ vel mῥ. ergo & Æ similiter ῥ vel mῥ, per 24.

26. Ex A, E mῥ ⊐, fit Æ ῥ vel mῥ. Nam ad expositam R, fiat RB=Aq : & RC=Æ : & RD=Eq. Sunt igitur B, D, ῥ ⊏, per 23. Et quia C est m ∸̈ inter B & D erit Cq ῥ ideoque & ipsa C ῥ. Si igitur C ῥ ⊏ R, erit Æ ῥ. Si vero C ῥ ⊏ R, erit & Æ mῥ.

27. Si ▯^{m} B mῥ constet ex ▯^{o} C mῥ, & ▯ D : erit etiam ▯^{m} D ῥ. At non conversè. Nam aliter fingatur ▯ D ῥ. Ad expositam R fiat RA=▯^{m} C mῥ ; & RE=▯^{m} D ; & RZ=▯ B mῥ. Erit igitur Z ῥ ⊏ R : & A ῥ ⊏ R : & E ῥ ⊏ R. Quare A, E ῥ ⊏. Estque Z ῥ. At per lem.: 5. Z ⊏ Zq. Est igitur Zq ῥ, & Z ῥ : quod ostensum est falsum. Ergo.

28. Invenire duas A, E mῥ ⊐, ita ut Æ sit ῥ. Sumantur B, C ῥ ⊐ : fiatque B. A::A.C::C.E. Dico I°, A, E mῥ : Nam Aq=BC mῥ, per 22. estque B.C::A.E. Dico II° A, E mῥ ⊐ : Nam B.C::A. E. Quare per 24. Dico III° Æ ῥ : Nam AE=Cq ῥ.

29. Invenire duas A, E mῥ ⊐, ita ut Æ sit mῥ. Sumantur B, C, D ῥ ⊐ : fiatque B. E::E. D::A. C. Dico I°, A, E mῥ : Nam Eq=BD mῥ. Dico II°, A, E mῥ ⊐: Nam D.C::E.A. Dico III°, Æ mῥ : Nam AE=BC mῥ.

Exemplum pro 28. B2. C√q3. A√qq 12. E√qq $\frac{27}{4}$. AE 3.

Exemplum pro 29. B√q5. C 2. D√q3. E√qq15. A√qq$\frac{80}{3}$. AE √ 20.

30. Invenire duas A, E ῥ ⊐, ita ut A ⊏ sit √qX.

Suman-

Sumantur duo numeri quadrati aq, eq; ita ut aq-eq non ſit Q. Tum expoſitâ A ꝛ, fiat aq.aq-eq:: Aq.Eq. Erit igitur etiam aq. eq::Aq. X.,per 19 e 5.

Dico I°, A,E ꝛ ɟ: Nam Aq,Eq non ſunt ut Q.Q.

Dico II°, A ⊐ √qX.: Nam ſunt ut Q.Q.

Exemplum pro 30. Aq & aq ſunt 9. eq & X. 4.

31. Inuenire duas A, E ꝛ ɟ, ita ut A ⊐ √qX.. Sumantur duo numeri aq, eq, quadrati; ita ut aq+eq non ſit Q. Tum expoſita A ꝛ, fiat aq+eq.aq::Aq.Eq. Erit igitur aq+eq.eq::Aq. X., per 19 e 5.

Dico I°, A,E ꝛ ɟ: Nam Aq, Eq non ſunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊐ √qX.: Nam Aq,X. non ſunt ut Q.Q.

Exemplum pro 31 aq & eq 4. eq & X. 1.

32. Invenire duas A, E mꝛ ɟ, ita ut Æ ſit ꝛ; & A ⊐ √qX.. Sumantur per 30, duæ a, e ꝛ ɟ, ita ut a ⊐ √q: aq-eq. fiatque a. A::A. e::e. E. Dico I°, A,E mꝛ ɟ, per 22 & 24. Nam Aq=ae mꝛ: & a.e:: A. E, ɟ. Dico II°, Æ ꝛ: Nam AE=eq ꝛ. Dico III°, A ⊐ √qX., per 15. Nam a ⊐ √q: aq-eq. Exemplum a 2. e √q3. A √qq 12. E √qq $\frac{27}{4}$.

Quod ſi per 31, Sumerentur a,e ꝛ ɟ; ita ut a ⊐ √q: aq-eq: Inventæ fuerint A, E mꝛ ɟ, ita ut Æ ſit ꝛ; & A ⊐ √qX..

Exemplum a √q5. e 2. A √q 20. E √q $\frac{64}{5}$.

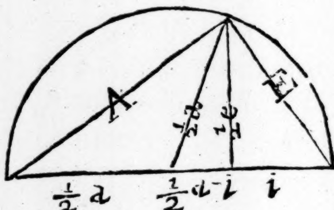
33. Invenire duas A, E mꝛ ɟ, ita ut Æ ſit mꝛ; & A ⊐ √qX.. Sumantur per 30, duæ a, e ꝛ ɟ; ita ut a ⊐ ſit √q:aq-eq: & ſumatur i ꝛ ɟ utrique a,e: fiatque a. A::A.i::e. E. Dico I°, A, E mꝛ ɟ: Nam Aq=a i mꝛ: Eſtque a. e::A. E. Dico II° Æ mꝛ. Nam AE=ie mꝛ. Dico III°, A ⊐ √qX.: Nam a ⊐ √q: aq-eq: quare per 15. Exem-

Exemplum a 2. e √q 5. i √q 2. A√qq 8. E√qq $\frac{9}{2}$
Quod si per 31, sumerentur a, e ɤ⌐ ⅂ƒ, ita ut a ⌐⊓- √q: aq-eq : Inventæ fuerint A, E mr⌐ ⅂ƒ, ita ut Æ sit mr: & A ⌐⊓- √qX.

Exemplum, a √q 5. e 2. A √qq 20. E√qq $\frac{16}{5}$.

Præparatio ad propositiones 34, 35, 36, demonstrandas in tribus lemmatibus.

Lemma primum. Si ad a adplicetur rectangulum æquale Q. $\frac{1}{2}$e, deficiens figura quadratâ: divisâ scil. a in a-i & i; ita ut a-i. $\frac{1}{2}$e:: $\frac{1}{2}$e. i. Erit $\frac{1}{2}$ a-i = √u: $\frac{1}{4}$aq-$\frac{1}{4}$eq: sicut in schemate apparet, Atq; per hanc interpretationē, a-i = $\frac{1}{2}$a + √u: $\frac{1}{4}$aq-$\frac{1}{4}$eq. & i = $\frac{1}{2}$a - √u: $\frac{1}{4}$aq-$\frac{1}{4}$eq. Et quia Aq = Q: a-i: + $\frac{1}{4}$eq. & Eq = iq + $\frac{1}{4}$eq. Nempe Q. $\frac{1}{2}$a ± √u: $\frac{1}{4}$aq-$\frac{1}{4}$eq: + $\frac{1}{4}$eq. Hac adhibita interpretatione



Erit A = √u: $\frac{1}{2}$aq + √u: $\frac{1}{4}$aqq-$\frac{1}{4}$aqeq.

Et E = √u: $\frac{1}{2}$aq -- √u: $\frac{1}{4}$aqq -- $\frac{1}{4}$aqeq.

Nam in quadratione lineæ $\frac{1}{2}$a ± √u: $\frac{1}{4}$aq -- $\frac{1}{4}$eq. Z est $\frac{1}{4}$aq + $\frac{1}{4}$aq -- $\frac{1}{4}$eq. Et Æ est √u: $\frac{1}{16}$ aqq - $\frac{1}{16}$ aqeq: quod duplicatum fiet √u: $\frac{1}{4}$aqq-$\frac{1}{4}$aqeq. huic si adjungatur + $\frac{1}{4}$eq; abolebitur alterum -$\frac{1}{4}$eq.

Lemma secundum: a--i: i:: Aq. Eq, ⌐⊓.

Nam a. A:: A. a--i } Quare { a. a--i:: aq. Aq.
Et a. E:: E. i } { a. i:: aq. Eq.

Lemma tertium: a. A:: E. $\frac{1}{2}$e.

34. Invenire duas A, E ⌐⅂ƒ, ita ut Z sit ɤ, & Æ mr.
Sumantur per 31, a, e ɤ⌐ ⅂ƒ, ita ut a ⌐⊓- √q: aq-eq:

&

& ex ipſis inveniantur A,E,Sicut in *Lem.pri.*

Dico 1° A,Eᒣ : Nam per *Lem.ſec.* Aq,Eq⊓.

Dico 11° Z ɤ: Nam in 31, A, E (quibus hic reſpondent a,e) ſunt ɤᒣ.

Dico 111°, *Æmr*. Nam per *Lem. tert.* AE$=\frac{1}{2}$ a e *mr*.

35. Invenire duas A,Eᒣ, ita ut Z ſit *mr*, & Æɤ. Sumantur per 32, a,e *mr*ᒣ, ita ut æ ſit ɤ, et a ⊓ √q: aq--eq: Et ex ipſis inveniantur A, E, ſicut in *lem. pri.*

Dico 1° A,E ᒣ, per *Lem. ſecun.*

Dico 11°, Z *mr*, per 32.

Dico 111°,Æɤ:Nam per *lem. tert.* AE$=\frac{1}{2}$ a e. ɤ.

36. Invenire duas A,Eᒣ, ita in Z et Æ ſint *mr*. Sumantur per 33,a,e*mr* ᒣ, ita ut æ*mr*, et a ⊓√q: aq--eq. & ex ipſis inveniantur A, E, ſicut in *Lem. pri.*

Dico I°,A,Eᒣ, per *lem. ſec.*

Dico II° Z *mr*, per 33.

Dico III°,Æ*mr* : per *lem. tert.* Conſulatur etiam Schema pro hiſce tribus propoſitionibus.

Coroll: ad 36: Hinc inveniri poſſunt duæ lineæ *mr*ᒣ, ſcil. √qZ, & √qÆ.

Principium Senariorum per Compoſitionem.

37. Si ſumantur a, e ɤᒣ; tota a + e hoc eſt ʓ, erit ɤ; vocaturque *Binomium*, ſcil. ♃ *Bin.* I. Nam per lemma 5, ʓq⊓ʓɤ.

2+√q3. Cujus Q: eſt 7 + √q48.

38. Si ſumantur a, e *mr*ᒣ (per 28) ita ut æ ſit ɤ,

tota

tota ζ erit ῥ; vocaturque *Bimediale* prius, ſcil: ℨ *Bin*: II. Nam per lemma 5, ζq ⊔ æ ῥ.

$\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Cujus Q: eſt $\sqrt{q}\,\frac{147}{4} + 6$.

39. Si (per 29) ſumantur a, e μ ⊣, ita ut æ ſit μ: tota ζ erit ῥ; vocaturque *Bimediale* poſterius, ſcil: ℨ *Bin*: III. Nam ζq, hoc eſt $ζ_1$ + 2æ, eſt ῥ. Nam expoſitâ R, fiat RT = ζq; & RP = $ζ_1$ μ, per 16 & 24: Erit RT-RP = 2æ. Sunt autem per lem: 5, RP & RT-RP μ ⊔: Quare P, T-P ῥ ⊔ ad R. Et per 37, T eſt ῥ. Et per lem: 1, RT hoc eſt ζ q ῥ.

$\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Cujus Q: eſt $\sqrt{q}\,\frac{145}{3} + \sqrt{q}\,80$.

40. Si (per 34) ſumantur a, e ⊣, ita ut $ζ_1$ ſit ῥ, & æ μ; tota ζ erit ῥ; vocaturque Major, ſcil: ℨ *Bin*: IV. Nam per lem: 6, ζq ⊔ $ζ_1$ ῥ. $\sqrt{u}: \frac{5}{2} + \sqrt{q}\,\frac{5}{4}$. pl: $\sqrt{u}: \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. Q. eſt $5 + \sqrt{q}\,20$.

41. Si (per 35) ſumantur a, e ⊣, ita ut $ζ_1$ ſit μ, & æ ῥ; tota ζ erit ῥ, vocaturque *Potens rationale & mediale*, ſcil. ℨ *Bin*: V. Nam per lem. 6, ζq ⊔ æ ῥ.

$\sqrt{u}: \sqrt{q}\,5 + 1$: pl: $\sqrt{u}: \sqrt{q}\,5 - 1$. Q. eſt $\sqrt{q}\,20 + 4$.

42. Si (per 36) a, e ⊣, ita ut $ζ_1$ & æ ſint μ ⊔; tota ζ erit ῥ, vocaturque *Potens duo medialia*. Scil. ℨ *Bin*. VI. Nam ζq, hoc eſt $ζ_1$ + 2æ eſt ῥ. Expoſita enim R, fiant RT = ζq, & RP = $ζ_1$. erit RT-RP = 2æ. Sunt autem RT. & RT-RP μ ⊔ Quare per 22, P, T-P ῥ ⊔ ad R. Et per 37 T eſt ῥ. Et per lem. 1, RT hoc eſt ζq ῥ. Ergo ζ ῥ.

$\sqrt{u}: \sqrt{q}\,5 + \sqrt{q}\,3$: pl: $\sqrt{u}: \sqrt{q}\,5 - \sqrt{q}\,3$. Q. eſt $\sqrt{q}\,20 + \sqrt{q}\,8$

43. 44. 45. 46. 47. 48. Neque ulla ex dictis ſex lineis ῥ, ζ poteſt dividi in ſua nomina a, e, præterquam in uno eodemque puncto. Nam aliter dividatur iterũ ζ in ſua nomina A, E. Erit (per lem. 3) Z - $ζ_1$ = 2æ - 2Æ.

2Æ. At (per 37 & 40) in ♃ *Bin.* I,IV. Z-ζ est ɥ; & 2 æ-2 Æ m͂r, per 27. Et (per 38 & 41) in ♃ *Bin.* II,V, Z--ζ est m͂r; & 2æ--2 Æ ɥ. Quare eadem quantitas erit ɥ & ɥ Quod est absurdum. In ♃ vero *Bin.* III, VI, Quoniam in 39 & 42, si supponatur ɥ ζ dividi in a, e; fiatque RT$=\zeta$ q, & RP$=\zeta$, & RT-RP$=$2æ; demonstratum est ɥ T dividi in nomina P, T-P ɥ ⊐. Item si iterum supponatur ɥ ζ dividi in A,E, alia nomina; fiatque RT$=\zeta$ q,& RS$=$Z & RT-RS $=$2Æ; similiter demonstrabitur ɥT. dividi iterum in nomina S & T-S ɥ ⊐, diversa ab iis P & T-P. quod est contra priorem partem hujus demonstrationis. Est enim ɥT *Binomium.*

Definitiones		&	Proprietates	
♃ *Binom. & Apotom.*			*Binomiorum & Apotom.*	
I	a, e ɥ ⊐̸ : æ m͂r		A ⊐ √qX.. A ⊐ R	ɥ ⊐̸
II	a, e m͂r ⊐̸ : æ ɥ		A ⊐ √qX.. E ⊐ R	
III	a, e m͂r ⊐̸ : æ m͂r		A ⊐ √qX..A,E ⊐ R	
IV	a, e ⊐̸ : ζ ɥ : æ m͂r		A ⊐ √qX.. A ⊐ R	A,E
V	a, e ⊐̸ : ζ m͂r : æ ɥ		A ⊐ √qX.. E ⊐ R	
VI	a, e ⊐̸ : ζ & æ m͂r ⊐		A ⊐ √qX..A,E ⊐ R	

49.50.51.52.53.54. Invenire sex *Binomia* A+E. Sumatur N 9 & dividatur tum in 5 & 4 tum in 6 & 3: & exponatur R. 9 4 scil: numeri quadrati.

Pro *Bin.* I.IV Sit A ⊐ R; fiatque 9. $\frac{5}{6}$:: Aq. Eq.
Pro *Bin.* II. V. Sit E ⊐ R; fiatque $\frac{5}{6}$. 9 :: Eq. Aq.
Pro *Bin.* III. VI. Sumatur tertius N 2, qui nec ad

ad 9, nec ad 5, nec ad 6, ut Q. Q. fiatque 2. [9] :: Rq. Aq ⊓. Deinde [9]. $\frac{5}{6}$ :: Aq.Eq: qui non sunt ut Q.Q. Quare in omnibus sex sunt Aq, Eq, ⊓ ⊓; & A, E ⊓ ⊓⊥. Item quia 9-5=4; & 9-6=3, erit [9]. [4]/3 :: Aq.X.: ideoq; A, √X. ⊓, ⊓.

55.56.57.58.59.60. Si singula sex *Binomia* A+E ducantur in expositum R, √q: AR+ER: constituet ordine singulas species 2æ *Binom.* Nam (consideratis prius intentè proprietatibus cujusque tum *Binomii*, tum 2æ *Bin.* in tabella præmissa) dividatur A in A-I & I, ita ut AI-Iq=$\frac{1}{4}$ Eq. Erit igitur A-I. $\frac{1}{2}$ E:: $\frac{1}{2}$ E.I. fiat etiam aq=AR-IR: & eq=IR.

A
A–I I E
R aq eq 2æ

a + e
aq æ
æ eq

Probatur 1°, a + e esse √q: AR+ER. Est enim AR-IR. $\frac{1}{2}$ ER :: $\frac{1}{2}$ ER.IR: Item aq.æ::æ.eq. Quare $\frac{1}{2}$ ER=æ. Ergo Q. a + e:=AR + ER.

Probatur 11°, In tribus prioribus *Binom*: a, e esse ⊓⊥. Nam quia (per 18) AR-IR ⊓ IR, erit AR-IR ⊓⊥

⊏⊐ AR: at (per *lem.* 5.) AR ⊤⊦ ER: ergo AR-IR ⊤⊦ ER: hoc eſt aq ⊤⊦ æ: Eſt autem aq. æ:: a.e.

In tribus poſterioribus *Binom*: a, e eſſe ⊤⊦. Nam (per 19) AR-IR, IR, hoc eſt aq, eq ⊏⊐.

Probatur 111°, In *Binom*: I. a, e eſſe ῥ. Nam AR-IR, IR, hoc eſt aq, eq ⊏⊐ ſunt AR ῥ.

In *Bin*: II, a, e eſſe mῥ: Nam quia A-I, I ⊏⊐ A ⊤⊦ R; Erit AR-IR, IR, hoc eſt aq, eq mῥ: at a, e ⊤⊦. Item æ eſſe ῥ: Nam 2æ=ER ῥ.

In *Bin*: III, a, e eſſe mῥ, ut ante. Item æ eſſe ῥ: Nam ER, hoc eſt 2æ, mῥ, quia E ῥ ⊏⊐ R.

In *Bin*: IV. aq+eq, hoc eſt AR, eſſe ῥ. Nam A ῥ ⊏⊐ R. Item 2æ, hoc eſt ER, eſſe mῥ: ut ante.

In *Bin*: V. aq+eq, hoc eſt AR, eſſe mῥ. Nam A ῥ ⊤⊦. Item 2æ, hoc eſt ER, eſſe ῥ. Nam E ῥ ⊏⊐ R.

In *Bin*: VI, aq+eq, hoc eſt AR; Item 2æ, hoc eſt ER, eſſe mῥ. Nam A, E ῥ ⊏⊐ R.

Atque in omnibus his tribus poſterioribus liquet a & e eſſe ⊤⊦, quia aq, eq ⊏⊐.

Conſect: Latus quadratum ſingulorum *Binomiorum* A+E conſtituet ordine ſingulas ſpecies ♃ *Bin*: a+e. Nam poſita R. eſſe 1, nihil per multiplicationem immutabitur. Unde majus quadratum erit A-I cujus latus eſt a: & minus I, cujus latus eſt e. Oſtenſum autem eſt ad prop. 34, in lem. pri: A-I eſſe $\frac{1}{2}$A+√u:$\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Et I eſſe $\frac{1}{2}$A-√u:$\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Atque hinc patet Analyſis *Binomii*: cujus hæc eſt regula.

Si è quadrato ſemiſſis nominis majoris tollatur quadratum ſemiſſis nominis minoris; & latus quadratum exceſſus ſemiſſi nominis majoris addatur,

dabit quadratum majus: sin detrahitur, minus.

Si igitur semis nominis majoris, & latus quadratum excessus, sint commensurabiles, ♃ *Bin*: erit bimembre. Si incommensurabiles, quadrimembre.

61. 62. 63. 64. 65. 66. Si quadratum ex ɤ a + e, ♃ *Bin*: aliqua, ad expositam R applicetur; latitudinem faciet A+E, idem *Binomium*. Nam (sicut in Schemate ad 55) fiat AR+ER = Q: a + e: Et AR-IR = aq. Et IR = eq: ideoque ER = 2æ. Probatur 1°.

In tribus prioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX: Nam a, e ⅂; quare AR-IR, IR ⊓. Ergo per 18.

In tribus posterioribus *Binomiis*, A esse ′⊓ √qX: Nam a, e sunt ′⊓: quare AR-IR, IR ′⊓. Ergo.

Probatur II°, A,E esse ɤ ⅂, &c. Nam in *Bin*: I. A est ɤ ⊓ R; & E ɤ ′⊓ R: est enim AR, hoc est aq+eq ɤ. & ER, hoc est 2æ ′⊓ aq+eq, per lem. 5.

In *Bin*: II, E est ɤ ⊓ R: & A ɤ ′⊓ R. Est enim ER, hoc est 2æ ɤ: Et AR, hoc est, aq+eq, ′⊓ æ, per lem. 5.

In *Bin*: III, A & E sunt ɤ ′⊓ R: Est enim AR, hoc est ʓ: & ER, hoc est, 2æ, *m*.

In *Bin*: IV, A est ɤ ⊓ R: & E ɤ ′⊓ R: est etiam AR, hoc est ʓ, ɤ; & ER, hoc est, 2æ, *m*. Et

In *Bin*: V. VI, similiter ex proprietatibus eorum poterit argui.

67. Si *Binomio* alicui A+E ⊓ sit B+C; Erit etiam *Binomium* ordine idem. Nam fiat A+E. B+C :: A.B::E.C, ⊓, & quia A, E, ɤ ⅂, etiam B,C ɤ ⅂. per 14. & 16. Item per 15, Si A, √q: Aq-Eq ⊓ sit vel ′⊓: Erit etiam B, √q: Bq-Cq: ⊓ vel ′⊓.

68. Si

68. Si in ꝛ *Bin:* II. III, a+e ⊓ b+c: Erit *Bimediale* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b.::e.c, ⊓. Sunt autem a, e mr ⊐: Ergo b, c, mr ⊐ per 24. Item a.c::aq. æ. Et b.c::bq.bc: quare aq.bq::æ.bc, ⊓. Ergo si æ ℞ sit vel mr; Etiam bc ℞ vel mr erit.

69. 70. 71. Si in tribus posterioribus ꝛ *Bin:* a+e ⊐ b+c: Erit ꝛ *Bin:* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b::e.c, ⊐ saltem. Sunt autem a, e ⊐. Ergo b, c ⊐. Item quia aq. bq:: eq. cq:: aq+eq. bq+cq, ⊐ saltem: Si aq+eq ℞ vel mr; etiam bq+cq. erit ℞ vel mr. Denique quia aq.æ:: a.e:: b.c::bq.bc; erit aq.bq::æ.bc, ⊐ saltem: Si æ ℞ sit vel mr; etiam bc ℞ vel mr erit.

72. 73. Si duo spacia ξ & 2æ componantur; quorum unum est ℞, & alterum mediale; sitque ℞ majus; recta totum spacium potens erit ꝛ *Bin:*I. vel IV. Sin mr majus; recta totum spacium potens erit ꝛ *Bin:* II, vel V. Si vero duo spacia mr ⊐ componantur: recta totum spacium potens erit ꝛ *Bin:* III, vel VI. Nam si ad expositam R adplicetur AR+ER = ξ + 2æ, conjunctim & seorsim, nempe AR = ξ: & ER = 2æ; sive unum ex ipsis sit ℞, & alterum mr: sive utrumque mr ⊓. Clarum erit AR, ER esse ⊓; ideoque A, E, ℞ ⊐. Quare si A ⊓ √qX, erit A+E unum ex tribus prioribus *Binomiis*. Si verò A ⊓ √qX, erit A+E unum ex tribus posterioribus *Binomiis*. Quodcunque autem ex ipsis sex fuerit; latus illius (quod etiam est √u: ξ+2æ:) erit ꝛ *Bin:* ordine idem. per 55.56.57.58.59.60.

Principium Senariorum per detractionem.

74, 75, 76, 77, 78, 79. Si ab a majore nomine cujusvis 2ʈ *Bin*: auferatur e nomen minus. Reliquum a-e erit ɤ, 2ʈ *Apotome* ejusdem ordinis: vocaturque *vel Apotome*, *vel Residuum mediale primum*, *vel Residuum mediale secundum*, *vel Minor*, *vel Cum rationali totum mediale faciens*, *vel Cum mediali totum mediale faciens*.

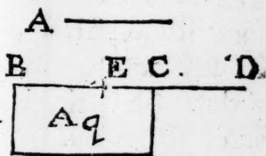
Nam Idem probari potest de ȣq, quod de ʒq probatum fuit, in 37, 38, 40, 41. Sed pro 2ʈ *Apot*: III. vel VI, ad expositam R, fiant RP=ȣq: & RT=$ʒ_1$: Et RT-RP=2æ. Et reliqua fiant sicut in 39. & 42. Nam $ʒ_1$-2æ=ȣq.

80, 81, 82, 83, 84, 85. Lineis hisce sex ɤ a-e, 2ʈ *Apot*: una tantum congruit recta linea e, pro minore nomine. Nam aliter constituatur linea ȣ, nempe a-e, etiam ex A-E. Per lem: 5, Z-$ʒ_1$=2Æ-2æ: At in 2ʈ *Apot*: I. IV, Z-$ʒ_1$ est ɤ, & 2Æ-2æ est mɤ. Et in 2ʈ *Apot*: II. V, Z-$ʒ_1$ est mɤ: & 2Æ-2æ est ɤ (per 37, 38, 40, 41:) quare eadem quantitas est ɤ & ɤ: quod est absurdum: In 2ʈ vero *Apot*: III. VI. Quoniam (sicut est in 45 & 48) Si supponatur ɤȣ constitui ex a, e; fiatque RP=ȣq: RT=$ʒ_1$: & RT-RP=2æ: demonstratum est ɤP constitui ex nominibus T, T-P, ɤꝗ. Item si iterum supponatur ɤȣ constitui ex A, E, aliis nominibus; fiatque RP=ȣq: RC=$ʒ_1$: & RC-RP=2æ. Similiter demonstrabitur ɤP constitui ex nominibus C, C-P (diversis a T & T-P) ɤꝗ. Quod est contra priorem

rem partem hujus demonstrationis. Est enim ɤrP *Apotome.*

86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111.	demonstrantur verbatim fere de ℨ & sicut de ℨ.	49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71 72, 73.

112. Eadem linea ɤr non est *Apotome*, & *Binomium.* Nam esto A *Apotome*, puta ♃ *Apot*: I: Exposita R, fiat R×BC=Aq. quare per 98 & 61, BC erit *Apotome* I; ei congruat CD. Sunt igitur BD, CD ɤr ⅁; & majus nomen BD ⊐ R. Rursus ponatur A *Binomium*, puta *Rad*: *Bin*: I, fiatque R×BC=Aq: Erit per 61 BC *Bin*: I: cujus nomina sint BE, CE, ɤr ⅁; & BE ⊐ R. Sunt igitur & per 16, BD, BE, ED ɤr ⊐: ideoque ED, CD ɤr ⅁: quare CE *Apot*: ɤr At CE fuit & ɤr. Quod est absurdum.

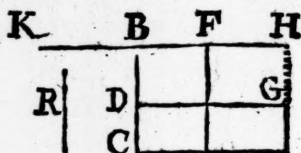


113, 114. Rq applicatum ad *Binomium*, latitudinem facit *Apotomen.* Sed applicatum ad *Apotomen*, latitudinem facit *Binomium.* Utrobique autem nomina sunt ⊐ proportionalia, & utriusque ordo idem. Nam in utroque Schemate, fiat BC×BF =Rq=DC×BH ɤr ⊐. Est igitur BC.DC:: BH.BF: Et (BC ∽ DC) BD. DC::(BH ∽ BF) FH. BF. His sic ordinatis,

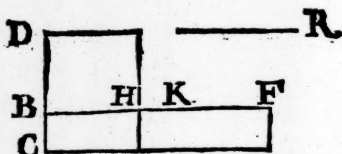
Pro 113, Esto *Binomium* aliquod BC, scil: BD+DC: fiatque FH-BF. BF:: BF. BK. Est igitur

 (BF

(BF+BK) FK. BK:: FH. BF:: BD. DC, ɤ⊤. Quare FK, BK⊤. Item (FK+FH) HK. FK:: (BK+BF) FK. BK, ⊤. Et HK. BK:: HKq. FKq:: FKq. BKq⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH⊓: At BH ɤ: quare HK, BK ɤ⊓: Et FK, BK ɤ⊤. Ergo per def: FK-BK, scil. BF est *Apotome*.



Pro 114. Esto *Apotome* aliqua BC, scil. DC-BD: fiatque FH. BF:: HK. FK:: (FH-HK. BF-FK) FK. BK:: FH. BF:: BD. DC ɤ⊤. Quare HK. FK:: FK. BK ⊤: Et HKq, FKq⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH⊓. At BHɤ: Itaque BKɤ, & FK, BK ɤ⊤. Ergo per def: BK+FK, scil. BF. est *Binomium*.

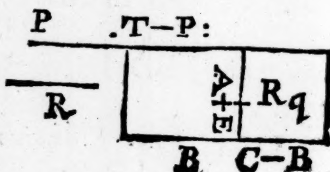


Secundò DC, BK⊓: Et BD, FK⊓. Nam BK ⊓BH⊓DC. Et DC. BK:: BD. FK. Ergo

Tertio Proportionalia.

Quarto sunt in eodem ordine; per 15 & 14.

115. Si *Apotomes* T-P, & *Binomii* A+E nomina sint ⊓ & proportionalia: Nempe T. A⊓:: P. E⊓: Dico ▯ T-P in A+E esse ɤ. Nam exposita R, fiat A+E in C-B=Rq. Est igitur C-B *Apotome*; Et A. C ⊓:: E. B ⊓. per 113: Quare



C. T.

C. T⊓⊔:: C-B. T-P⊓⊔ : : A+E in C-B ɥ. A+E in T-P etiam ɥ. Et √q: A+E in T-P: ɥ.

116. A Mediali M fieri poterunt innumeræ lineæ ɥ, quæ nec Mediæ ſunt, nec ullæ ex bis ſenis antedictis. Nam expoſita R, fiat MR; & ſit N=√q MR. Dico N eſſe ɥ, per lem: 1: at nec mediale; per 23: nec ullam ex bis ſenis, per *61*, *62*, *63*, *64*, *65*, *66*, & *98*, *99*, 100, 101, 102, 103.

Deinde fiat RN. & ſit O=√q RN: Dico O ɥ nec Mediale eſſe, nec ullam ex bis ſenis illis.



Tertio fiat OR, & ſit P=√q OR: Dico P ɥ eſſe nec Mediale, nec ullam, &c. Et ſic in infinitum. Neque etiam ɥ N, O ſunt eædem. Nam N=√q MR. & O=√q NR: &c.

117. Diameter quadrati eſt lateri incommenſurabilis: Nam alias ſi ſit ⊓⊔; eſto Diameter ad Latus, ut numerus D ad numerum L; ſintque minimi termini in eadem ratione: Et ipſorum quadrata ſunt verè numeri quadrati. At verò L non poteſt eſſe 1; quia quadratum diametri ad quadratum lateris eſt ut 2 ad 1: ideoque 2 eſſet numerus verè quadratus. Nec poteſt L eſſe numerus aliquis multitudinis: quia cùm ſit Dq.Lq::2.1;& Lq metiatur Dq; etiam L. metietur D: ideoque D & L non erunt rationis ſuæ termini minimi: Eſt enim numerus multitudinis maxima utriuſque communis menſura.

Finis Elementi decimi EUCLIDIS.



De Solidis Regularibus, *Tractatus*.

1. FIGURA quævis polygona rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora, quam eſt numerus laterum. Nempe quadrangulum dividitur in duo triangula: quinquangulum in tria, &c.

2. Quare ſi è numero laterum tollatur 2, & reliquus duplicetur: vel ſi è numero laterum duplicato tollatur 4: habebis *ſummam angulorum rectorum* in rectilinea quavis figura interius comprehenſorum. Sic triangulum intra ſe continet duos rectos: quadrangulum quatuor, quinquangulum ſex: &c.

3. Figuræ autem cujuſvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis.

4. Quare ſi quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, ſive angulorum: quotus erit quantitas *unius anguli exterioris*, in figura rectilinea ordinata. Sic angulus exterior in trigono ordinato eſt $\frac{4}{3}$ recti, ſive grad: $\frac{360}{3}$, in tetragono ordinato $\frac{4}{4}$ recti, ſive gradus $\frac{360}{4}$: in pentagono ordinato $\frac{4}{5}$ recti, ſive gradus $\frac{360}{5}$, &c.

5. Si quantitas anguli exterioris tollatur ex duobus rectis: vel ſi ſumma angulorum rectorum interiorum dividatur in numerum laterum: habebis quantitatem *unius anguli interioris*, in figura rectilinea ordinata.

dinata. Sequitur pars prior ex 4: posterior ex 2. Exempli gratia, In octogono ordinato, anguli unius exterioris quantitas est $2-\frac{4}{8}$ vel Gra: $180-\frac{360}{8}$. Item 8)12(1 $\frac{1}{2}$ recti: vel Gra: 8) 12×90(135.

6. Numerus angulorum planorum in solido quovis regulari, invenitur multiplicando numerum angulorum planorum unius basis in numerum basium. Nempe anguli plani sunt, in (4), 3×4: in (6), 4×6: in (8), 3×8 : in (20), 3×20 : in (12), 5×12.

7. Numerus angulorum solidorum in solido quovis regulari, invenitur dividendo numerum angulorum planorum in solido illo, per numerum angulorum planorum circa unū angulum solidum. Nempe anguli solidi sunt in (4), $\frac{3\times4}{3}$: in (6), $\frac{4\times6}{3}$: in (8) $\frac{3\times8}{4}$: in (20), $\frac{3\times20}{5}$: in (12), $\frac{5\times12}{5}$.

8. Numerus linearum lateralium in solido quovis regulari, est semis numeri angulorum planorum in illo solido. Atque hic etiam est numerus rectangulorum, sub latere, & lineâ perpendiculari è centro basis in latus. Nam unaquæque linea lateralis duobus inservit angulis.

9. Quare rectangulum sub latere, & linea perpendiculari è centro basis in latus, est superficiei totius, in (4), $\frac{1}{6}$: in (6) & (8), $\frac{1}{12}$: in (20) & (12), $\frac{1}{30}$. Est 6 & 7 e 14.

10. Solidum quodque regulare æquale est superficiei suæ trienti ducto in lineam perpendicularem è centro suo in basem.

11. Si linea ς secetur secundum extremam & me-

diam

diam rationem, ut σ sit majus segmentum, & τ minus: Dico $\sigma q = \varsigma\tau = \sigma\tau + \tau q$. per 11 & 3 e 2.

12, $Q{:}\tfrac{1}{2}\varsigma + \sigma{:} = 5Q{:}\tfrac{1}{2}\varsigma$. Nempe $\tfrac{1}{4}\varsigma q + \varsigma\sigma + (\sigma q)\ \varsigma\tau$. Est 1 & 2 e 13.

13. $Q{:}\tfrac{1}{2}\sigma + \tau{:} = 5Q{:}\tfrac{1}{2}\sigma$. Nempe $\tfrac{1}{4}\sigma q + (\sigma\tau + \tau q)\ \varsigma\tau$. Est 3 e 13.

Quare $\sigma.\tau :: \tau.\sigma - \tau$. Nam (per 11.) $\sigma q - \sigma\tau = \tau q$.

14. $\varsigma q + \tau q = 3\sigma q$. Nempe $\sigma q + (2\sigma\tau + \tau q + \tau q)\ 2\varsigma\tau$. Est 4 e 13.

15. $\varsigma + \sigma.\varsigma :: \varsigma.\sigma$. Nempe $\varsigma + \sigma.\varsigma :: \sigma + \tau.\sigma$. Est 5 e 13.

16. Si ς sit $\mathcal{R}$, σ erit *Apotome.* Nam quia per 13, $\tfrac{1}{2}\varsigma + \sigma.\tfrac{1}{2}\varsigma :: \sqrt{q5}.1$: Erunt $\sigma + \tfrac{1}{2}\varsigma, \tfrac{1}{2}\varsigma\ \mathcal{R}\urcorner$, per def:6 e 10. Et per 37 e 10, erit $\sigma + \tfrac{1}{2}\varsigma + \tfrac{1}{2}\varsigma$ *Binomium.* Ergo per 74 e 10, $\sigma + \tfrac{1}{2}\varsigma - \tfrac{1}{2}\varsigma$ *Apotome*, hoc est σ.

Item si ς sit $\mathcal{R}$, τ erit *Apotome.* Nam per 61 & 98 e 10, $\frac{\sigma q}{\varsigma\mathcal{R}}$ (hoc est τ) *Apotome.* vide 14. Est 6 e 13.

17. Si ς sit subtendens angulum pentagoni ordinati; erit σ latus pentagoni. Dico in Schemate, AC. CF:: CF. AF: Et CF=CB=AB. Nam quia trianguli BCF, omnes tres ang:$=\tfrac{10}{5}$ recti: è quibus ang: BCF$=\tfrac{2}{5}$ recti; & ang: CBF$=\tfrac{4}{5}$ recti: tertius igitur ang: CFB$=\tfrac{4}{5}$ recti: quare CF=CB=AB. Et quia liquet tri: ACB, BAF sim: Erit AC.AB:: AB. AF: Ergo. Est 8 e 13.

Consect. Et si ex angulo B per centrum, ad oppositum latus pentagoni, ducatur BKM, secans ipsam AC in I: secabitur etiam linea BM secundum extremam & mediam rationem in puncto I. Nam quia in tri: EBM, lateri EM parallela est FI: erit per 2 e 6, IM. IB:: FE. BF:: CF. FA. Ergo.

18. Si

18. Si circuli alicujus radius σ, erit τ latus decagoni. Nam quia arcus ABC=2GAN, erit ang: RKG=KGA=KAG: ideoque tri: RGK, KAG sim. Estque RG KG:: KG. AG. Atque AR =KG, quia ang: $\frac{1}{2}$RKG=KRG. Secatur igitur RG secundum mediam & extremam rationem in puncto A. Ergo latus decagoni AG est minus segmentum. Est 9 e 13. Quare etiam si ς sit Radius, erit σ latus decagoni.

R B N O A F I C H G K L M E D

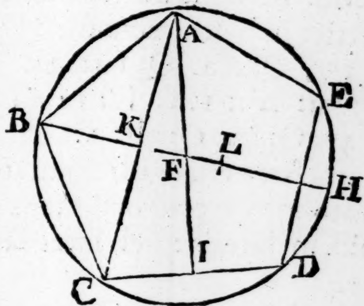
19. Perpendicularis KH vel KO, a centro in latus pentagoni ordinati, æquatur semisummæ Radii & lateris decagoni, Nempe KO=$\frac{1}{2}$RG=$\frac{1}{2}$KR. Nam quia KR=RG; sublato utrinque radio, manebit RN=AG. Estque KO=RO, per 2 e 3. Est 1 e 14.

20. Quadratum lateris pentagoni ordinati, minus quadrato Radii, æquatur quadrato lateris decagoni: Nempe AEq-KGq=AGq. Nam quia AHq+GHq =AGq: Et quia KG secatur med: & extr: ratione in L; estque KL=AG: Erit AEq+GLq=4AGq: Et per 14, KGq+GLq=3AGq. Fiat subductio. Est 10 e 13.

21. Quadratum lateris pentagoni, plus quadrato lineæ

lineæ ſubtendentis angulum pentagoni, æquatur quinque quadratis Radii. Nempe in ſchemate præcedente, AEq+CAq=5KGq. Nam CAq+AGq=4KGq: & per 23, AEq-AGq=KGq. Fiat additio. Eſt hæc 3 e 14.

22. Si circuli Radius ſit rationalis, latus pentagoni inſcripti erit irrationale, Nempe Minor. Nam quia triang: rect: AIC, AKF ſim: erit CI. $\frac{1}{2}$AC::KF. $\frac{1}{2}$AF: ideoque 2CI. CK::KF. $\frac{1}{4}$AF=FL, qui quadrans eſt Radii: Et CD+CK. CK:: KL.FL. At per 17, ſi CD ſit σ, CK erit $\frac{1}{2}$ς: quare ſi FK ſit σ, FL erit $\frac{1}{2}$ς: & per 12, KLq=5FLq. Eſt autem BLq=25FLq: quare BL. KL:: √q25. √q5, ϰ ꟻ, per def: 6 e 10: Et ſic ipſorum quadrata: unde etiam BLq. BLq-KLq:: 25. (25-5) 20:: 5. 4: Et BL. √u: BLq-KLq:: √q5. 2, ⊓. Quare BL-KL, nempe BK eſt ϰ *Apotom*: IV, per def: & 47 e 10: quippe oſtenſum eſt, A, E ϰ ꟻ; A⊓.√X.; & A⊓R. Item BCq=BKq+CKq=BKq+BK×BH (per 35 e 3) =ϰ*B*K×ϰ *B*H. Ergo per 95 e 10, *B*C eſt ϰ̃ *Apot*. IV, hoc eſt Minor. Eſt 11 e 13.



23. In

23. In triang. rect. cujus Hypotenuſa Z dividitur in ſegmenta A, E, perpendiculari ex angulo recto demiſſo, Erit 1°, ZA=Bq: & ZE=Cq. & AE=πq.



II°, A.E::Aq.πq::πq.Eq::Bq.Cq.

III, Z.A::Zq.Bq::Bq.Aq::Cq.πq.

IV°, Z.E::Zq.Cq::Cq.Eq::Bq.π q.

24. Si triangulum æquilaterum inſcribatur circulo: 1° perpendicularis è centro in latus æquatur $\frac{1}{2}$ Radii. Ideoque altitudo $\triangle^{i}$, ſive perpendicularis è vertice in baſem æquatur $\frac{3}{2}$ Radii.

2°, Q: dia. Q: lat: $\triangle^{i}$:: 4.3: ideoque Q: Rad. Q: lat: $\triangle^{i}$:: 1.3. Eſt 12 e 13.

3°, Q: lat. Q: alt: $\triangle$::4.3. ſc: 3. $\frac{9}{4}$. Eſt 12 e 14.

4°, Area trianguli æquilateri $\sqrt{\frac{27}{16}}$, æquatur quadrato mediæ proportionalis inter altitudinem & ſemiſſem lateris: vel inter latus & $\frac{1}{2}$ altitud. Eſt 29 e 14.

5°. Q. lat: $\triangle^{i}$. Q: perpend: à cent: in baſ:: 3. $\frac{1}{4}$. Eſt 18 e 14.

25. Si quadratum inſcribatur circulo: latus ipſius erit $\sqrt{2}$: Et Q: lat: $\square^{i}$. Q: dia: : 1.2.

26. Si eidem circulo inſcribatur, tum triangulum æquilaterum, tum quadratum: 1°, Q: lat: $\triangle^{i}$.Q:lat: $\square^{i}$::3.2: per 24 2°, & 25. Eſt 16 e 14.

2°, Q: alt: $\triangle^{i}$. Q: lat: $\square^{i}$:: 9.8: per 24 3°, & 26 1°.

3°, $\triangle$.$\square$:: $\sqrt{27}$. 8: ſcil: $\sqrt{\frac{27}{16}}$. $\sqrt{4}$.

27. Latera quinque ſolidorum regularium exponere,

nere, & inter ſe comparare. Eſt 13,14,15,16,17,18, e 13. Eſto AB vel ipſi perpendicularis Aβ, axis ſphæræ,& C centrum: ducatur Cβ ſecans circulum ſphæræ in H; ducaturque HG parallela ipſi Aβ: eritque GH=2CG; & per 47 e 1, Rq=5Q: $\frac{1}{2}$ HG; & per 12, ſi HG ſit ϛ, AG eſt σ; & per 18, ſi HG ſit Radius, erit AG latus decagoni; & per 20, AH latus pentagoni.

Menſuretur CV=CG; & VX=GH. Et è centro erigatur CF; jungaturque AF. tum dividatur axis AB trifariam, ſic ut BD ſit $\frac{1}{3}$, & AD$\frac{2}{3}$: ducanturque perpendicularis DE, & chordæ AE, BE. Secetur BE med: & extr: ratione in puncto L.

Statuaturque GI=BE; & IK ipſi AH parallela: Et ſic erit GK=BL ſegmentum majus.

Schema

Schema generale linearum atque menſurarum circa quinque ſolida regularia.

His diligenter memoriæ mandatis, ad ipſa quinque corpora regularia declaranda pergemus.

28. De Tetraëdro. Latus (4) eſt AE; & DE Radius circuli ambientis baſem ipſius triangulam. Nam per 23 IV°, AEq. DEq :: AB. BD :: 3. 1 :: Q: lat: Δ^{i}. Q: Rad: per 24 2°. Et CD & perpendicularis è centro ſphæræ in baſem, ſcil: $\frac{1}{6}$ axis. Et $\frac{1}{2}$ DE eſt perpendicularis è centro baſis in latus, per 24 1°.

29. De Hexaëdro. Latus (6) Eſt BE vel GI. Nam per

per 23 IV, ABq.BEq::AB.BD::3.1. Et quia per 23 II°, AEq=2BEq: erit ABq=3BEq (hoc est quadratũ diagonii Cubi æquatur tribus quadratis lateris): Estque per 25, Q:lat:□i. Q:dia circ::1.2::BEq AEq. Quare $\frac{1}{2}$AE est Radius circuli ambientis basem triangulam(6). Liquet etiam quod $\frac{1}{2}$BE æquatur perpendiculari, tum è centro sphæræ in basem, tum è centro basis in latus. Denique quia ABq.BEq::6.2::Q: axis. Q:lat:(6): Erit 2Q: axis=6Q:lat(6); quæ superficies est Cubica.

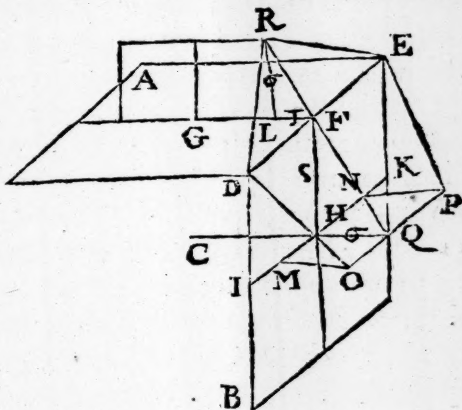
30. De Octaëdro. Latus(8) est AF vel AS. Nam(8) constat duabus pyramidibus quadrangulis, quarum altitudo est semiaxis: & Q: axis. Q:lat (8)::2.1. Et quia per 24 2°, Q:lat△i, quod est Q:lat(8). Q:diam: circuli ambientis::3.4. Erit Q: axis. Q: diam::3.2. Ductaq; ST parallela axi, quia ASq.CTq::ABq.BEq::3.1: Estque ASq=AFq=$\frac{1}{2}$ABq: quare CTq=$\frac{1}{2}$BEq =$\frac{1}{4}$AEq: ideoque CT=$\frac{1}{2}$AE; qui radius est circuli ambientis tum basem(6), tum basem (8). Et si AS vel AF sit latus △i, erit CT Radius circuli ambientis per 24 2°: Et $\frac{1}{2}$CT perpendicularis è centro △i in latus, per 24 1°. Est autẽ superficies (6)=12BE×$\frac{1}{2}$BE. & superficies (8)=12AF×$\frac{1}{2}$CT, quod satis liquet: Quare BE×$\frac{1}{2}$BE. AF×$\frac{1}{2}$CT::superf:(6). superf:(8):: (6).(8)::BE.AC. Est 27 e 14. Quoniam AFq.ACq:: BEq. CTq=$\frac{1}{2}$BEq.

31. De Icosaëdro. Latus(20) est AH vel AM. Nam Radiis GH & VX æqualibus cogitentur duo circuli describi, perpendiculariter insistentes plano AHXB: atque in ipsis includi, tum pentagonum ordinatum lateris AH, tum decagonum lateris AG: sic ut pun-

ctum H sit angulus pentagoni, & X decagoni: unde anguli pentagoni in uno circulo perpendiculariter imminebunt angulis decagoni in altero, ad distantiam GV = GH. Et è singulis angulis unius pentagoni ducantur duæ hypotenusæ ad angulos alterius utrinque proximos: Item ex singulis angulis utriusque pentagoni, in proximum axis terminum A vel B, ducantur hypotenusæ: quæ quidem omnes, hypotenusæ erunt triangulorum rectangulorum, quorum Cathetus æqualis est Radio GH, & basis lateri decagoni AG; ideoque singulæ æquales lateri pentagoni AH. Quare descripta erit figura constans 20 triangulis æquilateris & æqualibus. Includi autem angulos illos omnes sphæra, patet ex angulo H: nam circumvolutus semicirculus AHXB reliquos similiter angulos perstringet. Est igitur GH Radius circuli ambientis pentagonum (20); & ꝛ quia 5.1::GHq.GHq: est autem CH = $\frac{1}{2}$AB, & CG = $\frac{1}{2}$GH: Atque idcirco AH latus(20) est ꝛ, nempe Minor, per 25. Tum demissa MN perpendiculari in axem, statuatur MQ = AC, $\frac{1}{2}$ axis: erit MN Radius circuli circa basem, per 24 2°; quia AM.MN::AE.DE::3.1: Et $\frac{1}{2}$ MN perpendicularis è centro basis in latus, per 24 1°: Et NQ perpendicularis è centro sphæræ in basem; quia ibi Q est instar centri sphæræ. Denique BEq. GHq::5.3: Nam BEq. ABq::1.3: & ABq. GHq::CHq. CGq::5.1.

32. De Dodecaëdro. Latus (12) est BL vel GK, in præcedente schemate: & BE vel GI (latus (6)) subtendit angulum basis pentagonæ (12). Nam in sequente schemate, describantur duæ bases (6), AD, EB

EB, quarum commune latus eſt DE; & centrum ſphæræ C; & centrum baſis unius G, alterius H. A centro G ducatur GF perpendicularis lateri DE; & per centrum H ducatur IHK ipſi DE parallela Erunt igitur GF, HI, HK, ſemiſſes lateris (6): ſecentur ſingulæ in στ punctis L, M, N; ut majus ſegmentum ſit ubique centro proximum: & in punctis L, M, N, erigantur tres perpendiculares LR, MO, NP, æquales ipſi majori ſegmento: & ducatur OP, latus (12): eſt enim IK.OP::ς.σ::BE.BL, ſchematis præcedentis. Ducantur etiam DO, DR, EP, ER, quæ cum OP includunt pentagonum, baſem quidem (12). Nam



1°. Pentagonum DOPER eſt in uno plano: Eſt enim RFQ una recta linea, per 32 e 6.

2°, Eſt æquilaterum: eſt enim DOq = MOq pl. DI q+Mq, hoc eſt, 3MOq, per 14. At etiam 4MOq = OPq. Et ſic de cæteris.

3°, Eſt equiangulum. Eſt enim DPq = DIq pl. INq+NPq, hoc eſt, 3DIq, per 15 & 14. At etiam 4DIq = DEq. Et ſic de cæteris.

4°, Circumſcribitur ſphæra; Eſt enim CPq = CQq+QPq, hoc eſt, 3CHq, per 15 & 14. At

Q: axis. Q: lat(6) :: 3. 1 :: Q: $\frac{1}{2}$axis. Q: $\frac{1}{2}$lat(6). Et ſic de reliquis.

5°, Circa (6) deſcribentur 12 ejuſmodi pentagona: Cum enim per II, ſint in (6) latera 12; unicuique lateri ſuum adhærebit pentagonum; ſicut intuenti perſpicuum erit.

6°, Latus (12) eſt Apotome: Eſt enim DE latus (6) ϒ ꝗ axi: at per 16, ſi ς (DE) ſit ϒ, σ (OP) erit Apotome.

His ſic oſtenſis, ad prius illud ſchema redeundum denuò erit: In quo menſuretur Kγ = KG = BI. lateri(12): & demittatur γR. Erit per 20, γR Radius circuli circa baſem pentagonam: Et per 19, Rθ, ſcil. $\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK, eſt perpendicularis è centro baſis in latus. Eſt autem Rγ = MN: Nam quia (3BEq) 3GIq = Q: axis = 5GHq, erit 5.3 :: GIq. GHq :: GKq. GAq :: GIq+GKq. GHq+GAq: hoc eſt, per 17 & 21: 5Rγq. AMq = 3MNq, per 23 IV°. Quare 3×5Rγq = 5×3MNq. Eſtque QN perpendicularis à centro ſphæræ in baſem. Eſtque ſuperficies(20) = 30 AH×$\frac{1}{2}$MN: & ſuperficies(12) = 30GK×Rθ, quod ſatis conſtat. Quare AH×$\frac{1}{2}$MN. GK×Rθ :: ſuperf.(20). ſuperf. (12) :: (20).(12).

33. Si axis ſphæræ æqualis ſit, tum √u: ςq+σq unius lineæ, tum √u: ςq+τq alterius lineæ: erit σ latus (20); & τ latus (12). Nam in Schemate priore generali, ς.σ :: GH. AG :: BH. AH: At ABq = BHq+AHq. Item ABq = 3BEq = Q: BE+BL: pl BLq: hoc eſt 3ςq = Q: ς+σ: pl σq. Eſt enim σq = ςτ. Eſt 23 e 14.

34. √u: ςq+σq. √u: ςq+τq :: lat (6). lat (20) hoc eſt, Kγ. Zγ :: BE. AH, vel GI. AM: ſecta ſcil. KZ = R med: & extr: ratione in puncto R. Nam per 23 IV°

AMq=3Rγq: Et per 17, Zγq=3RKq. Quare AM. Zγ::Rγ. RK::ς.σ::GI.KG. Est 10 e 14.

35. Latus (6). Latus (20)::superf (12). superf (20). hoc est GI. AM::KG×Rθ. AM×½Rγ. Nam KG×Rθ=GI×½Rγ. Est enim GI.KG::ς.σ::Rγ+RK. Rγ::(½Rγ+½RK) Rθ. ½Rγ, per 18. Est 9 e 14.

36. Q: perpendic: è centro sphæræ in basem (4). Q: perpend: è centro spæræ in basem (8) :: 1.3:: CDq. ¼BEq.

37. Q: lat (4). Q: lat (8)::Basis (4). Basis (8). Nam AEq. ABq::2.3: Et ABq. AFq::4.2. Est 14 e 14. Hinc consectarium est,

quod, Superf (4). superf (8)::2.3: scil. 4×4.8×3.

38. Q: (4). Q: (8) ::4. 27. per 36 & consect: 37 Nempe × $\left\{ \begin{matrix} 1.3 \\ 4.9 \end{matrix} \right\}$. Est 17 e 14.

39. Basis (6). Basis (8)::8. √27: Nempe $\frac{4}{3}$. √$\frac{2}{4}$.

40. Basis (4). Basis (6)::√3.2::altit: Δ^i (4). latus Δ^i (4): nempe ½BE.AE. Est 30 e 14.

41. Superf (4). Superf (6) ::1. √3: Nempe √$\frac{4}{3}$×4.8: hoc est, Δ^m (4)×4.2Q: axis.

42. Tria (4)=(6): per 41 & 36: Nempe × $\left\{ \begin{matrix} 1.\sqrt{3} \\ 1.\sqrt{3} \end{matrix} \right\}$ est 32 e 14. Hinc consectarium est,

quod $\left\{ \begin{matrix} \text{Prisma basis \& altitudinis (4)=(6). Et} \\ \text{Pyramis basis \& altitudinis (6)=(4).} \end{matrix} \right.$

43. (8). 3 (4)::latus (8). latus (4): Nempe 2. (√$\frac{16}{27}$×3) √$\frac{16}{3}$::√2. √$\frac{8}{3}$. Est 22 e 14.

44. Si latus (8)=√u: σq+τq, erit latus (20) =√2τq. Nam BH+HA secatur med: & extr: ratione in H: Estque 2σq+2τq=2AFq=ABq=

BHq+AHq. Ergo AHq $=$ 2τq. Est 24 e 14.

45. Si latus (8) $= \sqrt{}$u: $\frac{1}{2}$ςq+$\frac{1}{2}$τq, Erit latus (12) $=$ τ. Nam GI+GH secatur med: & extre: ratione in G: Estque ςq+τq $=$ 2AFq $=$ ABq $=$ 3GIq $=$ Q: GI+GK:+GKq. Ergo GKq $=$ τq. Est hæc 25 e 14.

46. Si latus (4) $= \sqrt{}$u: σq+τq, erit latus (20) $= \sqrt{\frac{3}{2}}$τq. Nam BH+HA secatur media & extr: ratione in H: & $\frac{3}{2}$σq+$\frac{3}{2}$τq $= \frac{3}{2}$AEq $=$ ABq $=$ BHq +AHq. Ergo AHq $= \frac{3}{2}$τq. Est hæc 26 e 14.

47. Si latus (6) $= \sqrt{}$u: σq+τq, erit latus (20) $= \sqrt{3}$τq. Nam BH+AH secatur med. & extr. ratione in H: & 3σq+3τq $=$ 3 GIq $=$ ABq $=$ BHq+AHq. Ergo AHq $=$ 3τq

48. Si latus (6) $= \sqrt{}$u: ςq+τq, erit latus (12) $= \sqrt{3}$τq. Nam GI+GK secatur med. & extrem. ratione in H: & 3ςq+σq $=$ 3GIq $=$ Q: GI+GK:+ GKq. Ergo GKq $=$ 3τq.

49. Si axis sphæræ sit ʁ, superficies tum (4), tum (8), erit mʀ. Nam quia 3.2::Q:axis. AEq: erit Q: lat. (4) $= \frac{2}{3}$Q:axis: est etiam Q:lat. (8) $= \frac{1}{2}$Q:axis: scil. utrumque ʁ: quare & ipsorum latera sunt ʁ. At in Δo, per 24 3o, Latus. altitud::2. $\sqrt{3}$, ʁ ϑ. ergo per 22 e 10, area Δi est mʀ. Est 13 e 14.

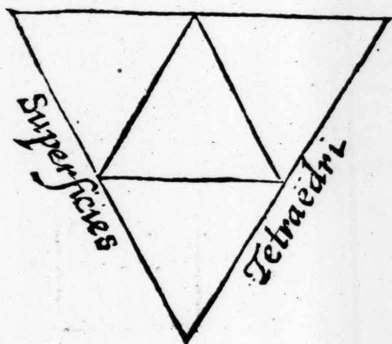
Notandum autem, quod in his quæ tum de elemento X, tum de V corporibus regular. scripta sunt, propositionum numerus est juxta Ch: Clavium.

Corporum

Corporum quinque regularium menſuræ, ad axem ſphæræ 2. Conſulatur Schema generale.

I. *In Tetraëdro.*

AE latus (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{3}}$: 1'632932.
DE ſemidiameter circuli ambientis baſem triangulam (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{9}}$: 0'942809.
Altitudo baſis (4), eſt 1'414213.
Area baſis (4), eſt 1'154657.
Superficies (4), eſt 4'618628.
CD perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (4), eſt $\frac{1}{3}$, 0'333333.
Soliditas (4), eſt 0'513216.

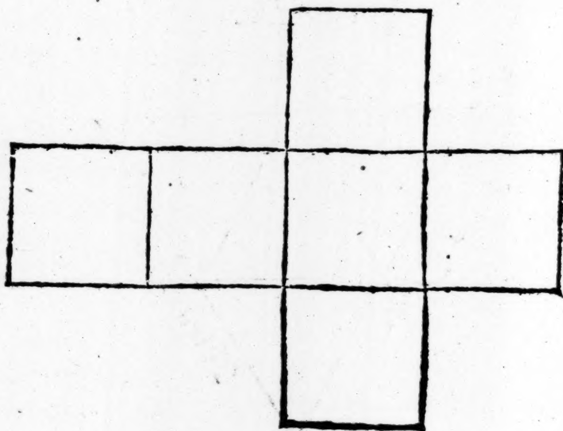


II.

II. *In Hexaëdro.*

BE latus (6), est $\sqrt{\frac{4}{3}}$; 1|154700.
CT est semidiameter circuli ambientis basem quadrangulam (6), $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.
Area basis (6), est $\frac{4}{3}$: 1|333333.
Superficies (6), est 8 : Nempe bina quadrata axis sphæræ.
$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro sphæræ in Basem (6) est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (6), est 1|539600.

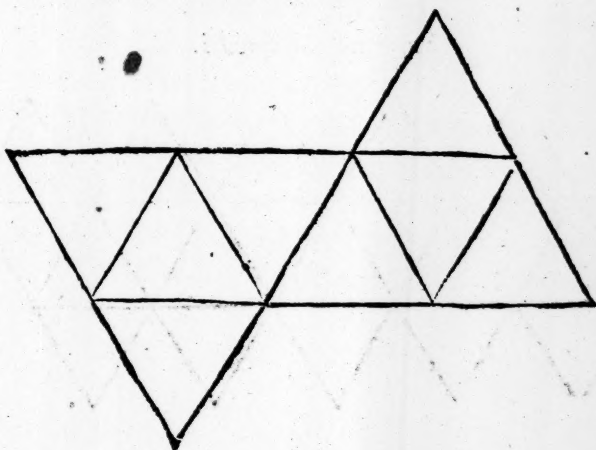
Superficies Hexaëdri.



III. *In Octaëdro.*

AF latus (8), est $\sqrt{2}$: 1|414213.
CT est semidiameter circuli ambientis basem triangulam (8), est $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.
Altitudo basis (8), est 1|224735.
Area basis (8), est 0|866018.
Superficies (8), est 6|928144.
$\frac{1}{2}$ BE perpendicularis è centro sphæræ in basem (8), est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (8), est 1|333333.

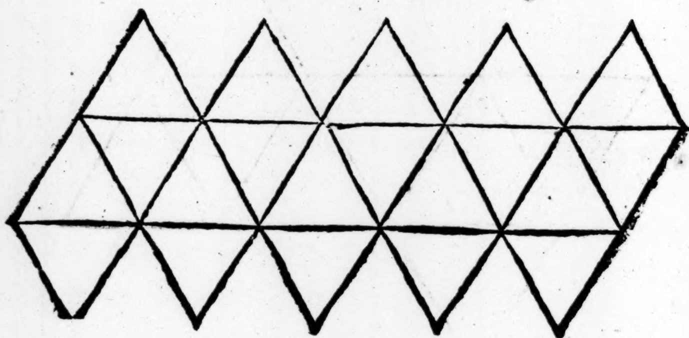
Superficies Octaëdri.



IV. *In Icosaëdro.*

AH latus (20), est $\sqrt{}$u: 2-$\sqrt{\frac{4}{5}}$: 1105573.
MN=Rγ semidiameter circuli ambientis basem triangulam (20), est $\sqrt{}$u: $\frac{2}{3}$-$\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0607062.
Altitudo basis (20), est 0910593.
Area basis (20) est 0503362.
Superficies (20), est 10067240.
QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (20), est $\sqrt{}$u: $\frac{1}{3}$+$\sqrt{\frac{4}{45}}$: 0794654.
Soliditas (20), est 2666658.
GH semidiameter circuli ambientis pentagonum (20), est $\sqrt{\frac{4}{5}}$: 0894427.

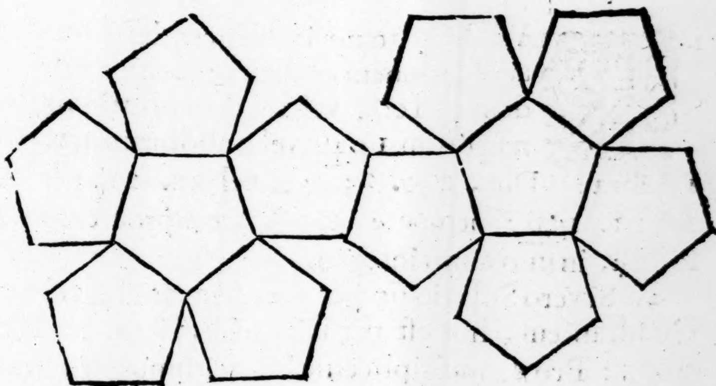
Superficies Icosaëdri.



V. *In Dodecaëdro.*

GK=BL latus (12), eſt $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$: 0,713642.
Rγ=MN ſemidiameter circuli ambientis baſem quinquangulam (12), eſt $\sqrt{u}: \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{45}}$: 0,607062.
Rθ=$\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK, perpendicularis è centro baſis in latus, eſt 0,49112.
Area baſis (12), eſt 0,876211.
Superficies (12), eſt 10,514532.
QN perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (12), eſt $\sqrt{u}: \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{45}}$: 0,794654.
Soliditas (12), eſt 2,785137.

Superficies Dodecaëdri.



F I N I S.



DE ANATOCISMO,
SIVE
USURA COMPOSITA.

Hoc eſt, Sex Theorematum fundamentalium, quibus Quæſtiones omnes circa Anatociſmum, facili negotio, ſolvi poterunt, inveſtigatio Analytica.

Notandum autem eſt, quod Solidus Anglicus continet 12 Denarios: Et Libra ſive Mina continet 20 Solidos; Denarios verò 240.

1. RATIO fœnoris reducenda primò eſt ad Rationem æqualem, cujus antecedens ſit 100, vel 1. Ut ſi Ratio ſit Denariorum 14|4, vel Solidorum 1|2. pro 1 Libra: Dic, 240. 254|4, vel 20. 21|2:: 100. 106::1. 1|06: nempe *α*. *β*. Quare *β* procreatur ex ſorte *α*, in uno anno integro.

2. Si vero Solutio ſit per ſemiſſem anni, vel per Quadrantem, hoc eſt per Dies 182|5, vel per Dies 91|25: Pro *β*, multiplicetur Logarithmus Procreati annui per $\frac{1}{2}$ vel per $\frac{1}{4}$: Sive & per $\frac{182|5}{365}$ vel per $\frac{91|25}{365}$

Perperam enim vulgò ſumitur $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{4}$ annui fœnoris.

3. Quia

3. Quia in progressione, numerus Rationum unitate minor est, quàm N numerus terminorum, sive Solutionum; erit numerus Rationum N-1. Item Logarithmus β ductus id N-1, erit Logarithmus ω ultimi termini. Denique Logarithmus β ductus in N, erit Logarithmus $\beta\omega$, hoc est, ipsius β multiplicati in se continuè pro numero Solutionum.

4. Quare $\beta\omega$ procreatur ex α sorte, sive 1^{lb}, elocata pro N vicibus. Hinc Duo oriuntur Theoremata.

Theo: I. 1^{lb}. $\beta\omega$:: Q^{lb}. Q^{lb} cum lucro in N vicibus.

Theo: II. $\beta\omega$. 1^{lb}:: Q^{lb} post N vices. valor præsens.

5. Deinde quia $\frac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha}$, hoc est, $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}=Z$, summæ omnium terminorum Progressionis (quorum ultimus est ω) estque idcirco Procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus: Hinc duo oriuntur alia Theoremata.

Theo: III. β-1. $\beta\omega$-1:: Q^{lb} Pensio intermissa pro N vicibus. Pensiones cum fœnore solvendæ in fine.

Theo: IV. $\beta\omega$-1. β-1:: Q^{lb} futura. Pensio æquivalens solvenda in N vicibus.

6. Denique quia $\beta\omega$ procreatur ex 1^{lb} elocata pro N vicibus: Estque $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$ procreatum ex Pensione 1^{lb} intermissa pro N vicibus; quod in pecuniis numeratis æquivalet pretio Pensionis: Dic, $\beta\omega$. 1^{lb}:: $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$. $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1 \text{ in } \beta\omega}$: Unde igitur in N vicibus procreabitur $\frac{\beta\omega-1}{\beta-1}$

Pretium

Pretium Pensionis. Hinc etiam oriuntur duo Theoremata.

Theo: V. β-1 in $\beta\omega$. $\beta\omega$-1::Q^{lb} Pensio pro N vicibus. Pretium ejusdem in pecuniis numeratis.

Theo: VI. $\beta\omega$-1. β-1 in $\beta\omega$:: Q^{lb} præsens. Pensio emenda pro N vicibus.

Nota quod Q^{lb} significat quantamlibet librarum summam.

Exemplum de Pensione durante 10 annos, solutione semestri; in Ratione 1 ad 1,06. Estque N 20. Et Logar: 1,06 est 0,025306.

0,025306 in $\frac{1}{2}$

0,012653 Log: β=1,0296

20 N

0,253060 Log: $\beta\omega$=1,791

$\bar{2}$,471291 Log: β-1=0,0296.

$\bar{2}$,724351 Log: β-1 in $\beta\omega$

$\bar{1}$,898176 Log: $\beta\omega$-1=0,791.

Est igitur

$\bar{1}$,898176

$\bar{2}$,724351

1,173825 Logar: Pretii 14,92^{lb} pro Pens: 1^{lb}.

$\bar{2}$,724351

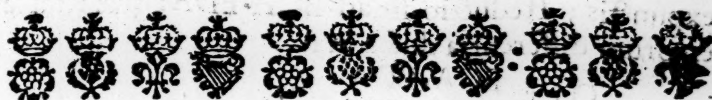
$\bar{1}$,898176

$\bar{2}$,826175 Logar: Pensionis 0,06701^{lb} pro Pret: 1^{lb}.

Logarithmis hisce inventis adde Logar: Q^{lb}.

Vel valores hosce inventos multiplica per Q^{lb}.

REGULA



REGULA FALSÆ POSITIONIS.

MUltiplica Positiones per alternos errores. Et si errores sint ejusdem generis, nempe uterque excedens, vel uterque deficiens; Differentiam productorum divide per Differentiam errorum: Si verò diversi sint generis; Summam productorum divide per Summam errorum: Et Quotus dabit numerum quæsitum.

Demonstrationis gratia. Quis numerus est, qui ductus in B, producit planum BA, nempe BApl.

Esto A-C Esto A-D
in B. BA-BC in B. BA-BD
Errores igitur sunt
BApl-BA+BC. BApl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt similia; ut quæ æqualia sunt, expurgentur; opus est ut Subductio fiat, mutando omnia signa minoris. Nam sic æqualibus se mutuò elidentibus, manebit errorum Differentia, BC-BD:

BC defic:	BD defic:
A-D	A-C
BCA-BCD	BDA-BDC

Hic etiam æqualibus utrinque per Subductionem expunctis;

expunctis; Reductio fit ad BCA-BDA: quæ est ipsa errorum differentia ducta in A.

Quare $\frac{BCA-BDA}{BC-BD}=A$.

Iterum Esto A+C. Esto A-D
in B. BA+BC. in B. BA-BD.

Errores igitur sunt.

BA+BC-BA pl. BA pl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt contraria; æqualia per Additionem, absque ulla signorum mutatione, se mutuò elident: Et sic manebit eorum summa, BC+BD.

BC exced:	BD defic:
A-D	A+C
BCA-BCD	BDA+BCD.

Hîc etiam æqualibus utrinque per Additionem expunctis; Reductio fit ad BCA+BDA: quæ est ipsa errorum summa ducta in A.

Quare $\frac{BCA+BDA}{BC+BD}=A$.

FINIS.

K with precedg

THEOREMATUM IN LIBRIS ARCHIMEDIS DE SPHAERA & CYLINDRO Declaratio.

Authore

GUILELMO OUGHTREDO

ANGLO.

OXONIÆ,
Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt apud THO. ROBINSON. *Anno Dom.* 1652.



Rerum quarundam denotationes.

R radius, eſt ſemidiameter circuli, ſive uno conſtet nomine AO, vel Eω, vel IU: ſive duobus ut AO+Eω, vel Eω+IU: ut in ſchemate 1.

$\delta.\ \pi ::$ ſemidiameter. ſemiperipheria.

$\frac{\pi}{\delta}$R, eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt R.

$\frac{\pi}{\delta}$:AO+Eω: eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt AO+Eω.

$\frac{\pi}{\delta}$Rq, eſt area circuli.

$\frac{\pi}{3\delta}$Rq × altitud: vel $\frac{\pi}{\delta}$Rq in $\frac{1}{3}$ Altitud, eſt Conus; ſcil: $\frac{1}{3}$ Cylindri.

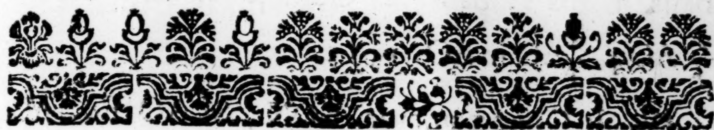
⌒ ſignificat ſuperficiem curvam.

Coni & Cylindri, qui in æqualibus ſunt baſibus, ſunt ut altitudines. 14 e 12.

Æqualium Conorum & Cylindrorum bases & altitudines reciprocantur. 15 e 12.

Assumo, Figuram regularem infinitorum laterum, cui nec major inscribi, nec minor circumscribi poterit; si plana sit, esse circulum; sin solida, esse sphæram.

Theorematum



Theorematum in Libris ARCHIMEDIS de Sphæra & Cylindro

DECLARATIO.

DUODECIM primas propositiones, quia demonstrationibus negativis, quas ego ut parùm scientificas, quantum possum, evito, inque ipsarum loco affirmativas substituo, inserviunt, missas faciam.

I. In Cylindro recto, Si 2R, M, Latus; hoc est, 2AO, M, KA, $\div\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\cap$ Cylindri.

Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $= \frac{\pi}{\delta}$ 2AO $\times$ KA. 13 I 1.

(Ad septem theoremata sequentia pertinet schema I.)

II. In Cono æquicruro KON, si KO, M, AO $\div\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\cap$ Coni. Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 14 I 1.

III. In Cono æquicruro KON, Dico esse semidi basis. Latus :: Basis. ◠ Coni. Nam AO. KO :: $\frac{\pi}{\delta}$ AOq. $\frac{\pi}{\delta}$AO in KO. 15 l 1.

IV. In Cono æquicruro KON, Si AO+Eω, M, Oω=KO−Kω ∺: Dico ◠ frusti O$\omega\nu$N=($\frac{\pi}{\delta}$Mq) $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω: ×Oω. Nam per 2, ◠ O$\omega\nu$N= $\frac{\pi}{\delta}$: AO×KO: mi $\frac{\pi}{\delta}$: Eω×Kω:= $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω : in: KO-Kω. Est enim AO+Eω in KO-Kω=AO × KO −Eω×Kω pl Eω × KO —AO×KO, quæ se invicem tollunt: Quia AO.Eω:: KO. Kω.

V. In Cono æquicruro KON, Si KO, M, AO ∺; & AP perpendicularis lateri KO: Dico ($\frac{\pi}{3\delta}$ Mq) $\frac{\pi}{3\delta}$ AO×KO in AP= $\frac{\pi}{3\delta}$ AOq in KA=KON. Nam KA. AP:: KO. AO:: AO × KO. AOq. Ergo. 17 l 1.

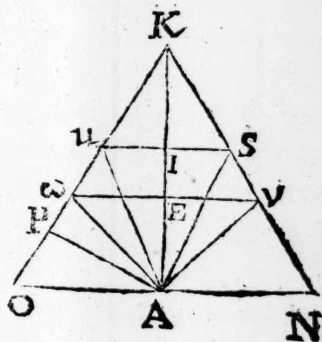
VI. In Cono æquicruro KON, Si Kω. M. Eω ∺; & AP perpend: lateri KO: Dico ($\frac{\pi}{3\delta}$ Mq) $\frac{\pi}{3\delta}$ Eω ×Kω in AP= $\frac{\pi}{3\delta}$-Eωq×KA, scil: rhombo KωAν. Nam KA. AP:: Kω. Eω:: Eω × Kω. Eωq. Ergo. 18 l 1.

VII. In Cono æquicruro KON, Dico frustum

Conicè

Conicè excavatum $O\omega A\nu N$, æquari Cono cujus basis est æqualis ◠ frusti $O\omega\nu N$, & altitudo AP : hoc est, con: KON — rhomb: $K\omega A\nu = \frac{\pi}{\delta}$: $AO + E\omega$: $\times O\omega$ in $\frac{1}{3}AP$. Nam $\frac{\pi}{\delta}$ $AO \times KO$ in $\frac{1}{3}AP = KON$, per 5 } ho-
Et $\frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega$ in $\frac{1}{3}AP$ = rhomb: $K\omega A\nu$, per 6 }
rum differentia est $\frac{\pi}{\delta}$ $AO \times KO - \frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega$, per 4, $= \frac{\pi}{\delta}$: $AO + E\omega$: $\times O\omega$ = ◠ $O\omega A\nu$; ductis omnibus in $\frac{1}{3}AP$. Ergo, &c.

VIII. In Cono æquicruro KON, Dico rhombum conicè excavatum $\omega UAS\nu$, æquari Cono cujus basis est æqualis ◠ frusti $\omega US\nu$, & altitudo AP: hoc est, rhomb $K\omega A\nu$-rhomb $KUAS = \frac{\pi}{\delta}$: $E\omega + IU$: $\times \omega U$ in $\frac{1}{3}$ AP. Nam



per 6, $\frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega$ in $\frac{1}{3}$ AP = rhomb $K\omega A\nu$ } horum
Et $\frac{\pi}{\delta}$ $IU \times KU$ in $\frac{1}{3}AP$ = rhomb $KUAS$ }
differentia est $\frac{\pi}{\delta}$ $E\omega \times K\omega - \frac{\pi}{\delta}$ $IU \times KU$, per 4, $= \frac{\pi}{\delta}$:

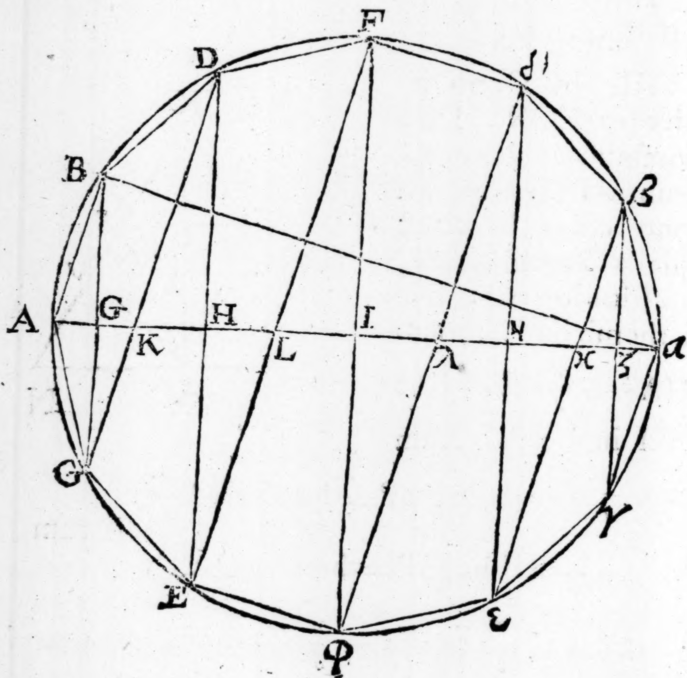
$E\omega$

$E\omega + IU : \times \omega U = \cap\, \omega US\nu$; ductis omnibus in $\frac{1}{3}$ AP. Ergo, &c.

IX. Si figura plana polygona laterum æqualium & numero parium. $ABDF\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi EC$, inſcribatur circulo, junganturque anguli rectis lineis parallelis: Dico $AB.\ B\alpha :: A\alpha.\ BC + DE + F\varphi + \delta\varepsilon + \beta\gamma$; hoc eſt, $2BC + 2DE + F\varphi$. Nam $AB.\ B\alpha :: \frac{1}{2}AK.\ \frac{1}{2}BC :: \frac{1}{2}KL.\ \frac{1}{2}DE :: \frac{1}{2}L\lambda.\ \frac{1}{2}F\varphi :: \frac{1}{2}\lambda\kappa.\ \frac{1}{2}\delta\varepsilon :: \frac{1}{2}\kappa\alpha.\ \frac{1}{2}\beta\gamma$.

Quare $A\alpha \times B\alpha = AB$ in $2BC + 2DE + L\varphi$. 21 l 1.

Et in ſegmento $A\delta\varepsilon$, erit $AB.\ B\alpha :: A\eta.\ BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$.



Quare

Quare $A\nu \times B\alpha = AB$ in $BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$.

X. Si circulo, vel circuli ſegmento alicui figura ejuſmodi plana polygona laterum æqualium & parium, tum inſcribatur, tum circumſcribatur; & diametro $A\alpha$ quieſcente, circulus circumvolvatur; deſcribetur figura ſolida conſtans ſuperficiebus quibuſdam Conicis: Et paralleli BC, DE, $F\varphi$, $\delta\varepsilon$, $\beta\gamma$, deſcribent totidem circulos parallelos. Atque in his, quæ circumſcripta eſt, ſive continens, major ſemper eſt circulo incluſo: & quæ inſcripta eſt, minor ſemper erit circulo ambiente. Et ſuperficies figuræ circumſcriptæ, ad ſuperficiem figuræ inſcriptæ ſimilis, eſt in ratione laterum duplicata: At figurâ ipſa ſolida circumſcripta, ad ſolidam ſimilem inſcriptam, in ratione triplicata. 22. 27. 30. 34. 37 l 1.

XI. Si diameter circuli includentis ejuſmodi figuram ſolidam, ſit $A\alpha$: fiatque $A\alpha$, M, $B\alpha$ $\div$: vel, quod idem eſt, per 9, $2BC + 2DE + F\varphi$, M, AB $\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq = ſuperficiei figuræ. Nam per 2, $\frac{\pi}{\delta}$ $BC \times AB$

= 2 ◠ coni ABC: & per 4, $\frac{\pi}{\delta}$ $BC + DE$ in $AB = 2$ ◠

fruſti BCED: & $\frac{\pi}{\delta}$ $DE + F\varphi$ in $AB = 2$ ◠ fruſti $DE\varphi F$.

Ergo $\frac{\pi}{\delta}$ $2BC + 2DE + F\varphi$ in AB = ◠ figuræ totius,

nempe $\frac{\pi}{\delta}$ Mq. 23. 28 l 1.

XII. In Schem: 3. Figuræ ejuſmodi ſolidæ, ſi ſphæræ

ſphæræ inſcribatur, ſuperficies $\frac{\varpi}{\delta}$Mq minor eſt circulo habente axem ſphæræ continentis Aα pro diametro. Nam M ⊏ Aα.

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\varpi}{\delta}$ Mq major eſt circulo habente axem ſphæræ contentæ 2IP=Bα pro diametro. Nam Aα, M, 2IP ∺ : Quare M cadet inter A & Q. 24, 29 l 1.

XIII. Quidni igitur ſphæræ ſuperficies æquetur quatuor maximis circulis ; nempe $\frac{\varpi}{\delta}$ Diam :q? 31 l 1.

XIV. Figura ejuſmodi ſolida æqualis eſt Cono, cujus Baſis eſt circulus æqualis ſuperficiei figuræ ; & Altitudo IP perpend:è centro ſphæræ in latus figuræ: hoc eſt, per 11, $\frac{\varpi}{3\delta}$ Mq in (IP) $\frac{1}{2}$Bα=figuræ toti ſolidæ. Nam per 6, Rhomb: BACI=$\frac{1}{3}$ ◠ BAC in IP. Et per 8, Excavatum DBICE=$\frac{1}{3}$ ◠ DBCE in IP. Et per 7, Excavatum FDIEφ=$\frac{1}{3}$ ◠FDEφ in IP. Et ſimiliter pro altero hæmiſphærio. Quare $\frac{1}{3}$ ◠ BAC +$\frac{1}{3}$ ◠ DBCE+$\frac{1}{3}$ ◠ FDEφ in Bα (2IP) =toti figuræ ſolidæ; nempe $\frac{\varpi}{3\delta}$ Mq: vel $\frac{\varpi}{3\delta}$ Aα×Bα in $\frac{1}{2}$BA(IP). 25, 29 l 1.

XV. Figura ejuſmodi, ſi ſphæræ inſcribatur, minor eſt quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo: hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei ſphæræ ; altitudinem verò æqualem ſemiaxi. Sin circumſcribatur, iiſdem major eſt.

Nam

Nam per 12, ſuperficies figuræ inſcriptæ, ſuperficie ſphæræ minor eſt: circumſcriptæ autem, major. 26. 29 l 1.

XVI. Quidni igitur ipſa ſphæra æqualis ſit quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo; hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei ſphæræ; Altitudinem verò æqualem ſemiaxi? 32 l 1.

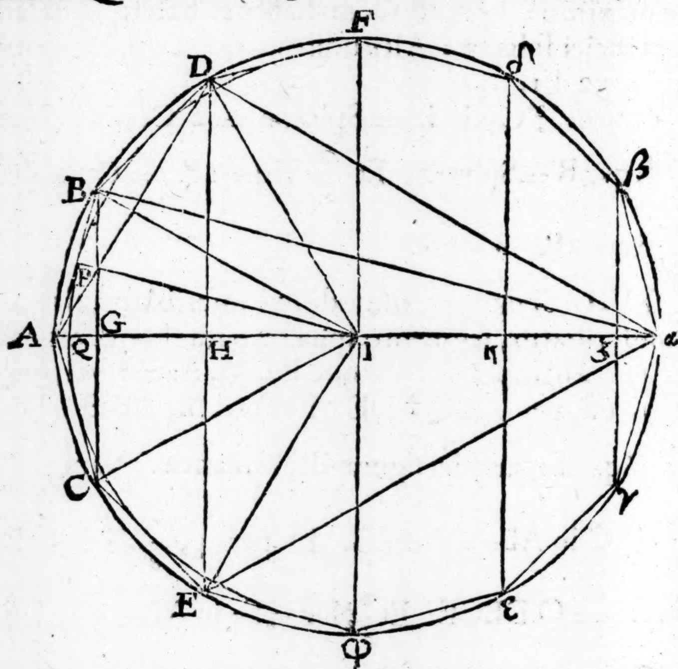
Conſect. $\frac{2}{3}$ Cylind: = Sphæræ = 2 Conis. Nam $\frac{\varpi}{3\delta} Rq \times 4R =$ Sphæræ. Et $\frac{\varpi}{\delta} Rq \times 2R =$ Cylindro. $\frac{\varpi}{3\delta} Rq \times 2R =$ Cono.

XVII. Si figura ejuſmodi ſive inſcribatur, ſive circumſcribatur, ſegmento ſphæræ, puta $A\delta\varepsilon$, cujus baſis ſit $\delta\varepsilon$; altitudo $A\eta$; fiatque $B\alpha$, M, $A\eta$ ∺: vel, quod idem eſt, per 9, $BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, M, AB ∺: Dico $\frac{\varpi}{\delta} Mq =$ ſuperficiei figuræ illius mancæ. Nam per 2, $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2}BC$ in $AB =$ ◯ ABC. Et per 4, $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}DE$ in $AB =$ ◯ DBCE: Et $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2}DE + \frac{1}{2}F\varphi$ in $AB =$ ◯ $FDE\varphi$. Et $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2}F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$ in $AB =$ ◯ $\delta F\varphi\varepsilon$. Ergo 33. 37 l 1.

XVIII. Figuræ ejuſmodi mancæ, ſi ſegmento ſphæræ, puta $A\delta\varepsilon$, inſcribatur, ſuperficies $\frac{\varpi}{\delta} Mq \sqsubset \frac{\varpi}{\delta} A\delta q$. Nam $A\delta q = A\alpha \times A\eta \sqsubset B\alpha \times A\eta$.

Sin

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $\sqsubset$ $\frac{\pi}{\delta}$ Aδq. Nam Bα=2IQ eſt diameter ſphæræ interioris ſive contentæ. Eſtque Aη $\sqsubset$ Qη. Quare $\frac{1}{2}$ M protenditur ultra IQ diametrum ſphæræ contentæ. 35.38.41 l 1.



XIX. Quidni igitur ipſa ſuperficies ſegmenti ſphæræ æqualis ſit circulo, cujus ſemidiameter eſt recta ducta a vertice ſegmenti in finem baſis? 40 l 1.

XX. Figura ejuſmodi manca, ſive inſcribatur ſegmento ſphæræ, puta DAE minori ſemicirculo, vel DαE majori, æqualis eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei illius figuræ mancæ; altitudinem

verò

verò æqualem perpend: IP è centro in latus figuræ, adjecto vel ablato Cono DIE medio; hoc eſt, toti ſolido DBACEI, vel reliquo DF$\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi$EI. Nam in ſolido minore DBA=CEI, per 6, Rhomb: BACI $= \frac{1}{3}$ ∩ BAC in IP. Et per 8, $\frac{1}{3}$ ∩ DBCE in IP = excavato DBICE. Ergo. Et ſimiliter de majore DF$\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi$EI. 36. 39 l 1.

Conſect. Quare & per 18, Si figura ejuſmodi ſegmento ſphæræ, puta DAE, vel DαE, inſcribatur, totum ſolidum minus eſt Cono, cujus baſis eſt circulus a ſemidiametro AD, vel αD; & altitudo ſemiaxis IA.

XXI. Quidni igitur Sector ſphæræ DBACEI, æqualis ſit Cono $\frac{\varpi}{3\delta}$ADq in IA; & reliquus Dα=EI, æqualis Cono $\frac{\varpi}{3\delta}$ αDq in IA? 42 l 1.

XXII. Si fiat Hα. Hα+Iα :: HA. HS: Dico $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq in HS = ſegm: ſphæræ DAE. Nam Hα. HA :: Hα + Iα − Hα. HS − HA :: Iα. AS. Eſtque (Iα + AS) IS. IA :: (Hα + HA) Aα. Hα :: Aαq. αDq :: ADq. DHq. Quare $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq × IS = $\frac{\varpi}{3\delta}$ ADq × IA = ſegmento DAE + (Cono DIE) $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq × IH.

Ergo

Ergo $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq$\times$HS (IS — IH) = ſegmento DAE.

Conſectarium. Quia $\frac{HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha}$ = HS: Erit $\frac{\varpi}{3\delta}$ $\frac{DHq \times HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha}$ = ſegmento DAE. Quare

$H\alpha . H\alpha + I\alpha :: \frac{\pi}{3\delta}$ DHq$\times$HA. ſegm: DAE.

2 1 2.

FINIS.

HOROLOGIORUM SCIOTERICORUM
IN PLANO,

Geometricè ſolùm, ſine Calculo Trigonometrico, delineandorum,

MODUS FACILLIMUS.

PER QUEM

Meridiana, Subſtylaris, & Stylus ipſe, non inveſtigantur modò, ſed etiam, in cujuſvis generis Plano, ſitu proprio inſcribuntur, omniaque perſpicuè demonſtrantur.

Inventore

GUILELMO OUGHTREDO

23um Ætatis Annum agente.

OXONIÆ,

Excudebat LEON. LICHFIELD, Veneunt apud THO. ROBINSON. 1652.



HOROLOGIA SCIOTERICA IN PLANO, Geometricè delineandi Modus.

Cap. I.

De Planis.



IN Hypothesin illam Astronomicam, quòd Terra nullius quantitatis sensibilis cum Sphæra Solari comparata, sed tanquam Punctum, habeatur: Ars Horologiographica præcipuè innititur. Planum enim in quo describitur Horologium, supponitur Parallelum majori alicui Circulo Cœlesti, qui tantùm à Plano distat quantum ab eodem Plano punctum aliquod pro Apice styli assignatum.

In Plano; primo considerandus erit Situs, qui est vel respectu Horizontis, vel Meridiani.

Respectu Horizontis; Planum est vel Parallelum, (& huic inscriptum Horologium, *Horizontale* vocatur;) vel Perpendiculare, (cujus generis sunt Muri omnes erecti;) vel Obliquum; quod rursus, vel Pronâ facie nutat, & vocatur *Inclinans*; vel Declivi & supinâ superficie residit, & vocatur *Reclinans*.

Inclinationis ista & Reclinationis Obliquitas, per arcum alicujus Azumith (sive Circuli Verticalis) inter Loci Verticem & Planum intercepti mensuratur, quod quidem Azumith Plano Perpendiculare est, & Quadrantis ope, in 90 Gr: divisi, facillimè invenitur.

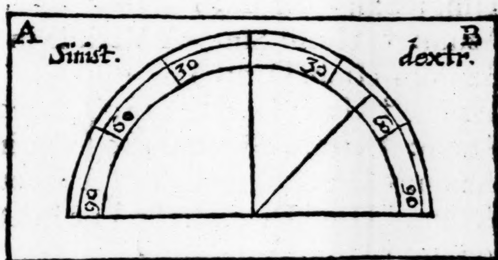
Respectu Meridiani; Planum est vel Directum; vel Declinans. Planum Directum est, quod Punctum aliquod è quatuor Cardinalibus directè respicit: Estque, vel Meridiano Perpendiculare, qualia sunt plana Meridionalia & Borealia: vel Parallelum, qualia sunt Orientalia & Occidentalia. Planum Declinans est, quod non directè Puncto alicui Cardinali opponitur; sed à Meridie aut Septentrione, versus Orientem aut Occidentem, declinat.

Declinatio plani est Arcus Horizontis, inter Sectionem plani horizontalem, & punctum Orientis vel Occidentis, interceptus; Vel, est Arcus Horizontis, qui inter Meridianum & Polum Sectionis Horizontalis intercipitur.

Investigatio Declinationis Plani cujusque aut Muri difficilior aliquantum. Tutissimam viam arbitror (quoniam Acus Magnetica facilè distrahitur) esse per Tabulam Rectangulam, uncias fere duodecim longam, latam 6; Cui Semicirculus à medio utrinque

in

in 90 gradus divisus inscribitur, stylúsque à Centro erigitur, ut in Schemate subjecto videre est.



Usus hujus Instrumenti talis est. Quolibet die (datà priùs Declinatione Solis) ante decimam Horam AM (i. e. ante Meridiem) vel post secundam PM (i. e. post Meridiem) applicetur Muro Latus Instrumenti AB, ita ut Horizonti maneat Parallelum; & quem Gradum Styli Umbra vel in Dextro vel Sinistro Quadrante notet observes, quam idcirco [*Umb: Dextr:*] vel [*Umb: Sinistr:*] voco: Deinde quàm citissimè Solis Altitudinem inquiras. Jámque Solis, tam à Polo Boreali, quàm á Vertice, Distantiam, simulque Altitudinis Poli Complementum, adeptus; quære (aut ex Analemmate, aut Projectione Horizontali, vel tandem Trigonometricè) Azumithalem Solis à Meridie distantiam. Denique, cum Tempore Diei, Solis Azumith, Stylíque Umbrâ, Tabellam sequentem pete; &, facto quod ibi faciendum præcipitur, verum Muri situm habebis.

AM.	Azum: - Umb: Sin:	A Meridie in Ortum.
AM.	Azum:+Umb:Dext:	
PM.	Umb: Dext:-Azum:	
AM.	Umb: Sin: - Azum:	A Meridie in Occas.
PM.	Azum: + Umb: Sin:	
PM.	Azum: - Umb: Dext:	
AM.	Azum: + Umb: Dext: ex 180	A Septentrione in Ortũ.
PM.	Azum: + Umb: Sin: mi: 180	
PM.	Azum: + Umb: Sin: ex 180	A Septentrione in Occasum
AM.	Azum: + Umb: Dex: mi: 180	
AM.	Azum: + Umb: Sin: = 90	In Ortu.
AM.	Azum: - Umb: Dex: = 90	
PM.	Azum: - Umb: Sin: = 90	In Occasu.
PM.	Azum: + Umb: Dex: = 90	
	Azum: - Umbra = 0 .	In Septentr:
	Azum: + Umbra = 180.	In Meridie.

Exempli gratia. Julii 15 post Meridiem, inveni Umbram in Gradu 30 Dextri Quadrantis; Solem vero altum 23 grad: & gradum ferè 20um Declinationis Borealis attingentem; unde Azumith erat, gr: $91\frac{1}{2}$. At in Tabula [PM. Azum: - Umb: Dex:] est à Meridie in Occasum: quocirca $91\frac{1}{2}$-30, i. e. $61\frac{1}{2}$ est Declinatio Muri Meridionalis in Occasum vergentis.

Rursus; Eodem Julii 15° post Meridiem, inveni Umbram in 57 Gr: Sinistri Quadrantis; & Altitud: Solis 22 $\frac{1}{10}$: Unde Azumith erat graduum 93. At [PM Azum: + Umb: Sin: ex 180] est à Septentrione in Occasum. Ergo 93+57 ex 180, id est, 30 gr: est

est Muri Borealis in Occasum vergentis Declinatio.

Prout Horizontem, Meridianumve, respicit Murus aut Planum, ita Nomen suum quod in eo describitur Horologium sortitur; veluti, si Planum Reclinans, Declinet etiam à Meridie in Ortum, ejusdem Horologium dicitur Meridionale Reclinans Declinans in Ortum.

Cap. II.

Linearum, quæ in describendis Scioterici præcipue usui sunt, Declaratio.

1. Lineæ Horariæ, sunt intersectiones Circulorum Horariorum cum Plano Scioterici.

2. E Lineis Horariis, Principalis est Meridiana, seu Linea horæ duodecimæ, quæ est ipsa intersectio à plano Meridiani loci cum plano Scioterico facta. Et, ab hâc, Linearum Horar: divisio principium ducit.

3. Circulorum Horariorum plana omnia in planum Æquinoctiale perpendiculariter cadunt, dividuntque æqualiter in 24 partes, per lineas rectas quæ sunt Lineæ Horarum in Æquinoctiali; at cætera plana omnia dividunt inæqualiter. Circulorum autem Horariorum communis Intersectio in Polis est & Axe Mundi sive Æquinoctialis.

4. Horologii Stylus (lineam illam intelligo à qua Umbra projicitur) Axis Mundi segmentum esse supponitur; ideóque ita semper locandus est, ut extre-

mitatibus suis exactè Mundi Polos respiciat, extremitate sc: superiori polum apparentem & inferiori occultum.

5. Quare, si planum intersecet mundi Axin, Sciotericum in eo descriptum Centrum habebit, è quo Lineæ omnes Horariæ ducuntur: At si Planum Axi Parallelum sit, non habebit Centrum sed Lineæ omnes Horariæ erunt tum Stylo tum sibi invicem parallelæ.

6. Substylaris est Linea Plani Stylo proxima, cui Stylus perpendiculariter imminet; est enim Meridianus Loci illius in Terra, cui Planum est Horizontale; in Ortum à subjecto Loco elongati, si Substylaris inter Horas Matutinas cadat; at in Occasum, si inter Pomeridianas: Differentia Longitudinum, est Arcus Æquinoctialis inter Substylarem & Meridianum Æquinoctialis interceptus.

7. Elevatio Poli supra Planum Scioterici, est Angulus quem Stylus constituit cum Substylari.

8. Est alia insuper Linea insignioris usus, Intersectio scilicet Plani Æquinoctialis cum Plano Horologii; vulgò *Linea Contingens*, quoniam in eâ solâ Lineæ Horariæ Scioterici, Lineæque Horariæ Æquinoctialis sese mutuò intersecant; Et, quoniam Centrum Æquinoctialis in ipso Axi est, ejusmodi Linea Substylarem ad rectos angulos secat.

9. In Planis omnibus Australibus, Polus Australis elevatur; in Borealibus, Borealis: duobus tantum

cap. 4. §4. Casibus exceptis, (ut suo Loco dicetur) in quibus Polus oppositus elevatur; ideoque Substylaris & Stylus inventus trans Centrum in oppositam Partem protrahendus erit.

10. Scio-

10. Scioterici Delineatio tribus distinctis Operationibus perficitur; hoc Ordine: Prima est, Meridianam, Substylarem, & Stylum, debitis Locis inscribere. Secunda est, Lineam Contingentem ducere; & Æquinoctialem, cum Meridiana, Lineísque ejus Horariis, ad Contingentem usque protrahere. Tertia est ipsas Scioterici Lineas Horarias describere, & Numeris propriis notare.

11. Eadem Meridianæ, Substylaris, & Styli Inscriptio duobus aliquando diversi Generis Scioatericis inservit: scilicet, vel Chartam cui inscribuntur sursum vorsum invertendo, ut in directè Septentrionalibus aut Australibus; vel faciem aversam ejus ostendendo ut in Orientalibus aut Occidentalibus Erectis. Aliquando etiam quatuor Generis inservit; tam Anteriorem, quam Aversam faciem Invertendo.

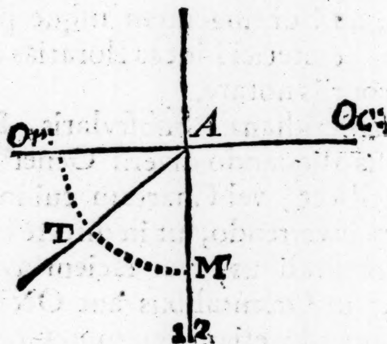
Cap. III.

De Scioterico Horizontali.

1. In Plano Horizontali, Meridianus, seu Linea Duodecimæ, à Septentrione in Meridiem exactè ducitur; ideoque Meridiano Loci subest: Eadem quoque Substylaris est: & Angulus Styli supra eam inclinati, æqualis est Elevationi Polari, seu Latitudini, Loci.

2. Ut delineetur igitur, Duc in Plano Lineam Ortum & Occasum directè indicantem; hanc in Puncto A, circa medium, secet perpendicularis AM;

quæ ſimul & Meridiana & Subſtylaris erit; Punctum autem A Centrum erit Scioterici; & Linea Prima *Or. Oc.* Hora 6ta.



Pedem circini in puncto A fige, & altero pede ad quodvis Meridianæ latus Quadrantem deſcribe; in quo, à Meridianâ incipiens, arcum MT Altitudini Polari æqualem numera; &, per terminum ejuſdem, è Centro A, Lineam AT producito, quæ Stylum dabit.

Cap. IV.

De omnimodis Sciotericis directè Septentrionalibus, aut Auſtralibus; ſive Erecta ſint, ſive Obliqua.

1. IN Planis omnibus directè Septentrionalibus aut Auſtralibus, tam erectis quam obliquis, Meridiana

ridiana in Lineam Horizonti parallelam perpendiculariter cadit; Eadémque Subſtylaris eſt.

2. Si Planum Erectum ſit, Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Complemento Elevationis Polaris.

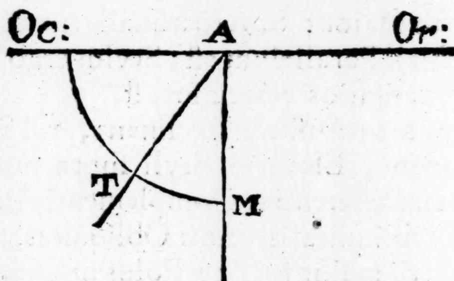
3. Si Planum ſit Auſtrale Inclinans, vel Septentrionale Reclinans; Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Complemento Altitudinis Polaris, & Obliquitati, ſimul ſumptis. At ſi Obliquitas Altitudini Polari major ſit, tum Angulus Elevationis Styli erit Recto Major: Si verò æqualis fuerit, Planum æquinoctiali Parallelum eſt; Stylus ergo è Centro A ad rectos angulos erigendus eſt.

4 Si Planum ſit Auſtrale Reclinans, vel Septentrionale Inclinans; Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Differentiæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis. At ſi Obliquitas, Complemento Polari, major fuerit; Polus oppoſitus elevatur, (qui unus eſt è caſibus antea memoratis *Cap*.2. *Sect*. 9.) Si verò Obliquitas, Complemento Polari, æqualis fuerit; Planum Axi parallelum eſt: ideóque Sciotericon in eo deſcriptum Centro carebit; uti dictum eſt *Cap*. 2. *Sect*. 5.

5. Ad delineandum igitur quodvis hujus generis Sciotericon, ducatur primùm in Plano Linea Horizonti parallela (quæ ſimul in Ortum & Occaſum dirigitur): Hæc circa medium in Puncto A ſecetur à Perpendiculari AM, quæ & Meridiana & Subſtylaris erit; Punctum autem A Sciioterici Centrum erit, (ſi ſaltem Centrale fuerit,) & linea illa prima *Or*. *Oc*. Hora VIta modò omnino reperiatur. Pede circini

in

in puncto A fixo, ad quodvis Meridianæ latus, pede altero Quadrantem describe, (infra lineam *Or. Oc.* in Australibus Planis, supra verò in Septentrionalibus;) & in hoc Quadrante, à Meridianâ, numera arcum MT, æqualem Elevationi Styli supra Substylarem, (per 2am, 3am, 4am Sectionem inventæ;) Et è Centro A, per Terminum ejusdem, duc Lineam AT Styli futuri; ut in Schemate præcedenti transpositis solum Literis *Or. Oc.*



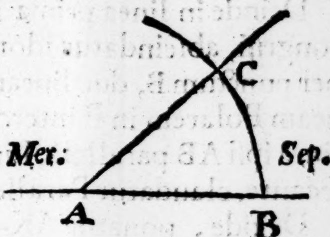
Cap. V.

De Sciotericis, Directè Orientalibus & Occidentalibus, Erectis.

IN directè Orientalibus & Occidentalibus Erectis; nec Centrum est nec Meridiana, cùm Planum hujusmodi plano Meridiani parallelum sit: Sed Substylaris in lineam Horizonti parallelam, ad angulum Altitudini Polari æqualem, insistit, Septentrionem supernè indicantem: Stylus autem ei parallelus imminet.

Ad

Ad Sciotericum igitur hujusmodi delineandum, ducatur in Plano linea Horizonti parallela, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Et Centro A, prope Meridionalem extremitatem electo, Quadrantem versus Borealem describe; In quo arcum BC Altitudini Polari æqualem designans, Lineam AC Substylarem extende.



Cap. VI.

In Planis, directè Orientalibus & Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. PRimo, Ducatur in plano Meridiani, linea Horizonti parallela AB, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Hæc circa medium secetur à perpendiculari AC: Punctúmque A Centrum erit. Pedum altero circini ad punctum A fixo, altero ad Lineam AC Diametri extenso, Quadrantem describe, (infra Lineam primam, AB, versus Meridiem, si Planum inclinet; suprà verò ad Boream, si reclinet:) Et, à Diametro AC incipiens, numera in Quadrante congruo tam Obliquitatem, quàm Altitudinis Polaris Complementum; Et, per Arcuum extremitates, è Centro A, Binæ producantur lineæ; quarum una vocetur, Linea *Obliquitatis*; altera, Linea *Polaris*:

Deinde

Deinde in linea prima AB, è regione Quadrantis congrui, abſcindatur idoneum ſegmentum AB: &, per punctum B, duc lineam Diametro parallelam, lineam Polarem in P intercipientem. Quarta denique lineâ ipſi AB parallelâ, Lineâmque Obliquitatis in O ſecante, claudatur Parallelogrammum ABPC.

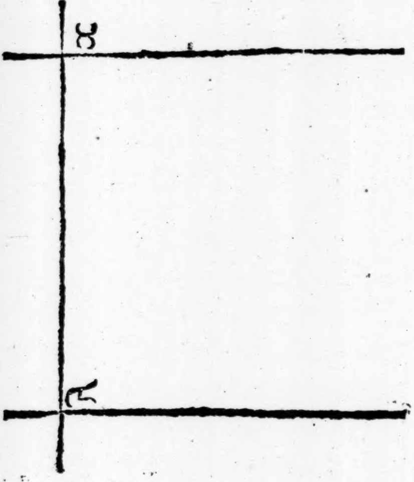
Deinde, ponatur AK=AO=BL, verſus CP; & ducatur linea Horizontalis KL.

Poſtremò, ſuper Lineam Obliquitatis AO, menſuretur AN=CO, & ducatur NR ipſi AB parallela, deinde ſuper LB verſus B, ponatur LS=NR. Producatur AS pro Subſtylari; in quâ, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST=AR: &, pro Stylo, producatur AT, Subſtylari ad Angulum SAT inſiſtens. *Exemplum Scioterici in Plano Directo Orientali, Inclinante grad. 30. Vide in Figura* A.

Demonſtratio. Protrahe Lineas AC & BP ad uſq; κ & λ, addendo illis Longitudinem ipſius CO. Conſtitue dein Triang: Rectang: BPλ=ACO: Et, Plano in Lineis Bλ. Pλ. diſſecto, plicentur Lineæ CP & BP ad rectos angulos, (Antrorſum quidem pro Inclinantibus, Retrorſum pro Reclinantibus Planis,) adeo ut Punctum λ in Triangulo, & alterum λ in linea Pλ coincidant: adeoque Plana ACBP, & BPλ in Planum Horizontale PCκλ ad Rectos Angulos inſiſtent. Atque, in hoc ſitu, quatuor cogitanda ſunt Plana; Planum ſc. Horizontale PCκλ, Planum Erectum ACPB (quod Meridiani Planum eſt,) & Planum Obliquum ABλκ=ABLK Plano Declinationis, quoniam Bλ=BL. Jam, ſi à Puncto P ducatur Linea Pσ, perpendicularis Hypotenuſæ Bλ Rectang: Triang:

APλ:

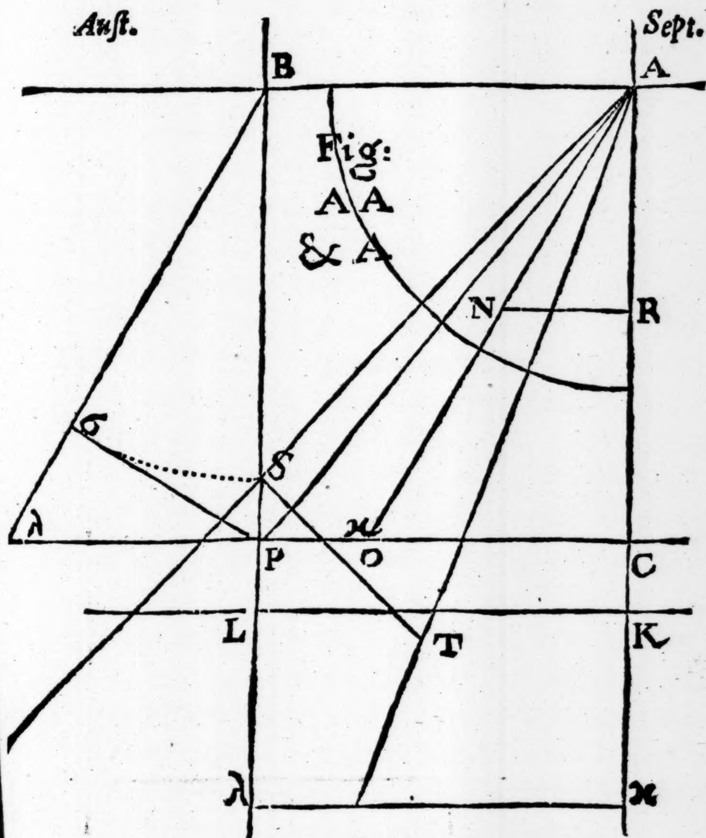
Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ AA, Cap. 6. ut lineis similiter notatis directè subsit.



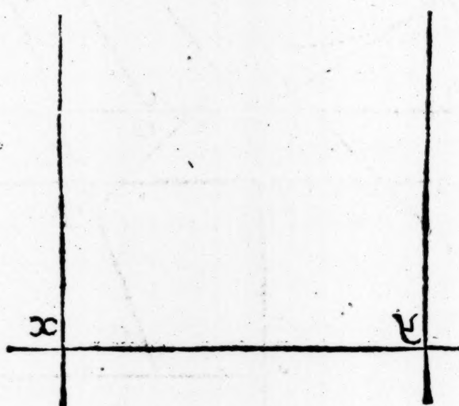


Orientale Directum Inclinans gr. 30.

Si linea κλ & triangulum BPλ desint, erit Figura A.



Orientale Reclinans gr. 30.



APλ: patet, quòd linea imaginaria AS, Substylaris erit Plani Obliqui; &, quòd illi respondeat AS, in Plano Delineationis: quódque Altitudo Styli, in Puncto σ, sit Pσ=AR=ST. Nam Triang: Rectang: Pσλ=ANR, quoniam Hypotenusa Pλ=AN; & Angulus BλP=ANR, est Complementum Obliquitatis. *Demonstrationi inservit Figura* AA.

Cap. VII.

In Planis Australibus aut Septentrionalibus Erectis, Declinantibus in Ortum aut Occasum, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. DUcatur primò Linea Horizonti Parallela AB. Distinguantur etiam extremitates ejusdem seu Plagæ ad Ortum & Occasum. Secetur autem in Puncto A, circa medium, à Perpendiculari AC, quæ Meridiana erit; Punctum A verò Centrum Scioterici.

Circini pedum altero in Centro A fixo, & altero ad AC tanquam Diametrum extenso, semicirculum à plagâ Declinationi contrariâ describe. In cujus quadrante (inferiori, si Meridionale sit Planum; superiori verò, si Septentrionale,) tam Declinationem, quam Complementum Elevationis Polaris, ab AC Diametro incipiens, numera: &, per arcuum duorum extremitates, binæ è Centro lineæ producantur, quarum una vocetur Linea *Declinationis*, altera *Polaris*. Deinde in Linea prima AB, versus Semicirculum, segmentum abscinde congruum AB: & à Puncto B producatur

producatur linea Diametro parallela, lineam Polarem in P ſecans: quartâ denique lineâ PC, ipſi AB parallelâ, claudatur Parallelogrammum ABPC. Jam, ſuper Lineam Declinationis, aptetur AD=AB; pérque D, ducatur etiam FDE Diametro Parallela, Lineam AB in F, PC in E, ſecans.

Poſtremò, Pro Subſtylari producatur AE; ſuper punctum verò E, ad rectos angulos, erigatur ET =DF; &. pro Stylo, ducatur AT, Subſtylari ad Angulum EAT inſiſtens.

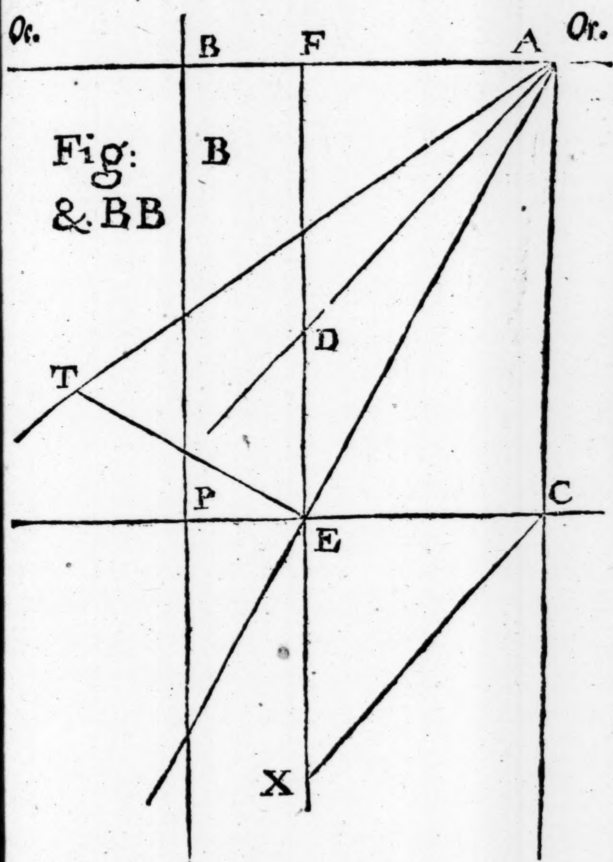
Exemplum Scioterici in Plano Auſtrali erecto, Declinante in Ortum gr: 42. 30′. *Vide in Figura* B. Ubi tamen, cœlantis incuriâ, deeſt linea AP.

2. Demonſtratio. Si Parallelogrammo ACEF, adjiciatur Triangulum CEX=AFD, tanquam in Plano Horizontali in quod Parallelogrammum ACEF ad Rectos Angulos inſiſtere ſupponitur, (plicato nempe in Linea CP Plano,) perſpicuè patet Rectangulum Triangulum ACX=ACP eſſe Gnomonem ſeu Stylum Horizontalem, Lineam vero CX Meridianam Plani Horizontalis, Stylumque AX Mundi Axin, & Rectangulum Triangulum AET =AEX Gnomon erecti Plani. *Demonſtrationi inſervit Figura* BB.

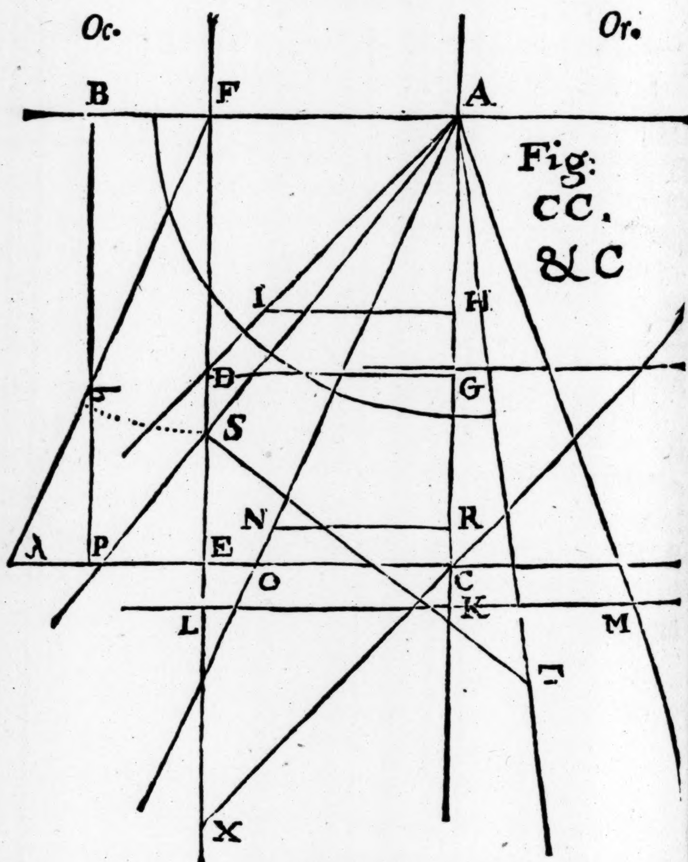
3. Notandum eſt, quòd in Planis omnibus Declinantibus, quamvis etiam obliqua ſint, ſemper incipiendum erit ab ejuſmodi Figurâ, AFDECX (uti jam præceptum eſt,) ſecundum Declinationem, Muri Planive dati, delineatâ; cui addenda eſt etiam DG ipſi AF Parallela, erit ergo AG=XE. Quod ſemel monitum ſufficiat.

CAP.

Meridionale erectum, Declinans versus Orientem.



Meridionale, Declinans versus Orientem gr: 42$\frac{3}{4}$. & Inclinans gr: 24.



Septentrionale, Declinans versus Orientem, & Reclinans.

Cap. VIII.

In Planis Australibus Declinantibus & Inclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. DElineetur (ut prius *Cap.* VII. *Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX, ad datam Declinationem. Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in Semicirculo numera; ductâq; Obliquitatis Lineâ AO, ponatur AK=AO=FL versus CE; & producatur Linea Horizontalis LK.

Sumatur AH=CO; ductâque HI ipsi AB parallelâ, abscindatur à Linea Horizontali KM=HI ad alterum Diametri latus: & pro Meridiano ducatur AM.

Postremò, Super Lineam Obliquitatis AO, mensuretur AN=AG+AH: & ducatur NR ipsi AB parallela: tum, super Lineam LF versus F, ponatur LS=NR, & protrahatur pro Substylari AS: à Puncto autem S, ad rectos Angulos, erigatur ST=AR: &, pro Stylo, producatur AT, Substylari ad angulum SAT insistens.

Exemplum Scioterici in Plano Australi, Declinanti in Ortum 42°, 30′; *& Inclinanti* 24°, 0′. *Vide in Figura* C.

Cap. IX.

In Planis Meridionalibus Declinantibus & Reclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Inclinantibus, Meridianam, Substylarem & Stylum inscribere.

1. DElineetur ad Datam Declinationem (uti prius *Cap.* 7. *Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX.

Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in semicirculo numera; &, ductâ Lineâ Obliquitatis AO, ponatur AK=AO=FL, versus CE; & ducatur Linea Horizontalis KL.

Deinde mensuretur AH=CO: &, ductâ HI ipsi AB parallelâ, sumatur in Linea Horizontali KM=HI, & ad idem Diametri Latus; & ducatur, pro Meridiano, AM.

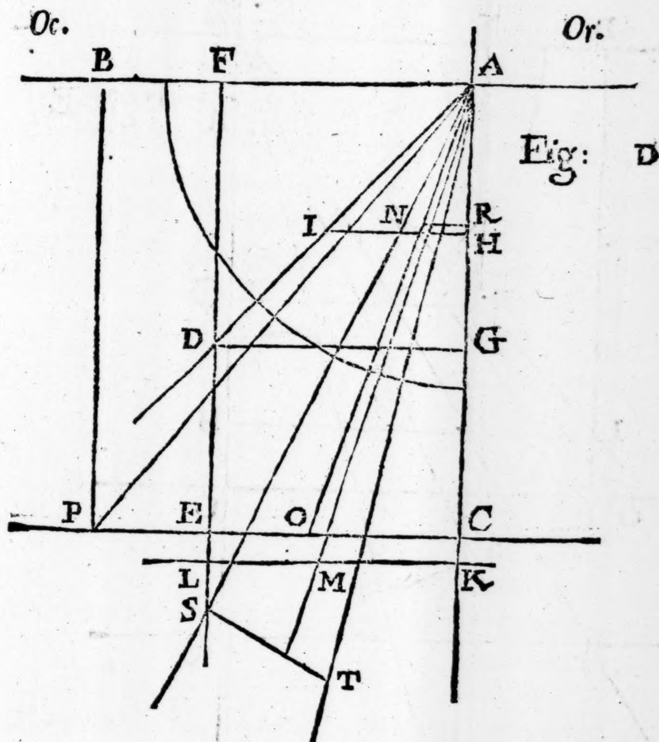
Postremò, in Obliquitatis Lineâ AO ponatur AN =GH differentiæ sc. inter AG & AH: & ducatur NR, Lineæ AB Parallela.

Tum, si AG⊏AH (hoc est, EX⊏CO) super lineam LX versus X ponatur LS=NR. At si AG⊐AH (hoc est, EX⊐CO) super Lineam LF versus F ponatur LS=NR. Producatur pro Substylari AS; super quam, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST=AR, & producatur Linea Stylaris AT, Substylari ad Angulum SAT insistens. Et in hoc Casu secundo, quum AG⊐AH, Polus oppositus elevatur, (qui è Casibus duobus Alter est *Cap.* 2. *Sect.* 9. memoratis.) Et si AG=AH, hoc est EX=CO, Planum Axi Parallelum est; & quod in eo describitur Sciotericum

tericum Centro carebit (ut *Cap.* 2. *Sect.* 5. monstratum erat:) &, in isto Casu, AM Substylaris erit, non autem Linea Duodecimæ.

EXEMPLUM I.

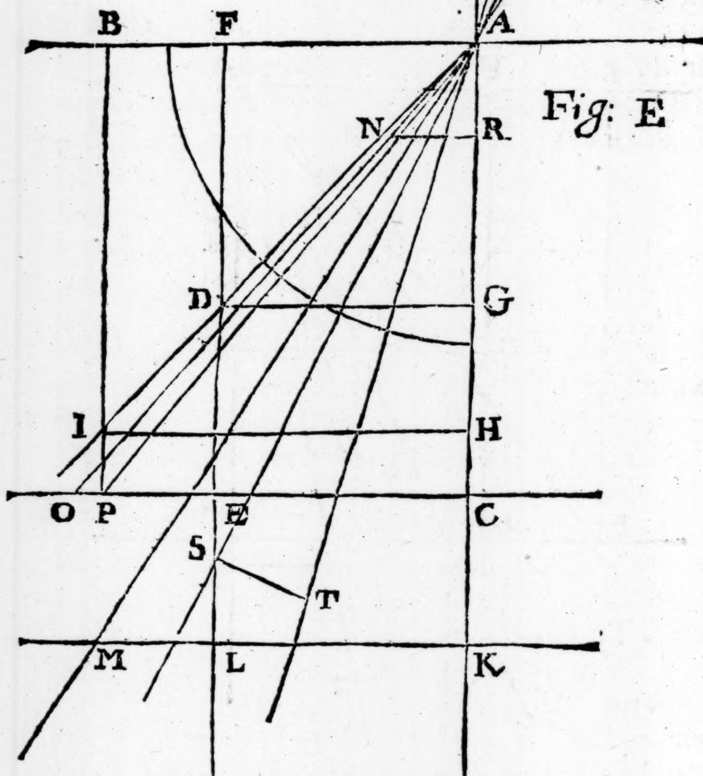
Meridionale, Declinans versus Orientem gr: $42\frac{1}{2}$.
& Reclinans gr. 18. *pro Latitudine gr*. 51.30′.



Septentrionale, Declinans versus Orientem, gr. 42.
& Inclinans gr. 18. *pro Lat. gr*. 51. 30′.

EXEMPLUM II.

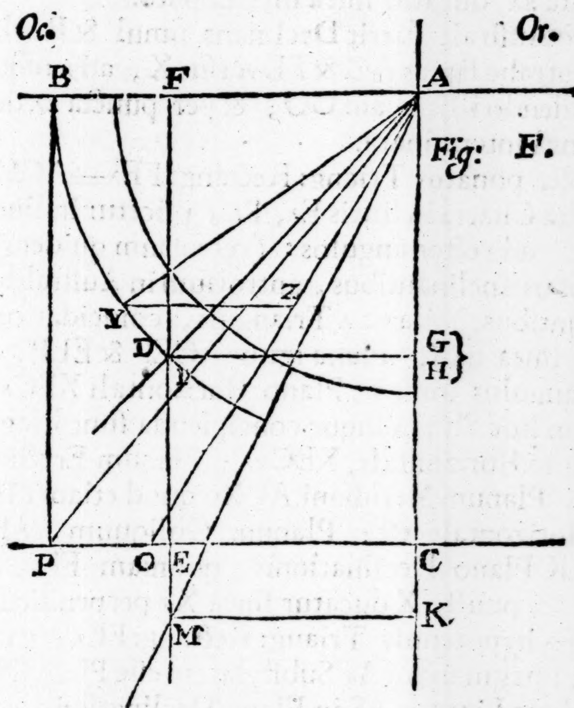
Meridionale Declinans versus Orientem gr: $42\frac{1}{2}$. & Reclinans gr: $40\frac{1}{2}$. pro Latit: 51°.30′.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr: $42\frac{1}{2}$. & Inclinans gr: $40\frac{1}{2}$. pro Lat: gr: $51\frac{1}{2}$.

EXEMPLUM III.

Meridionale Declinans versus Orientem gr: 42½. & Reclinans gr: 30+. pro Latit: 51°. 30'.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr: 42½. & Inclinans gr: 42½. pro Latit: gr: 51½.

Demonstratio operis in Capitibus VIII & IX. Si Sciotericon Australe fuerit Declinans simul & Inclinans; adauge Planum CEX, Papyrum adglutinando lineæ CE, (at ponè Planum ACEP;) in qua sub lineis CA & EF ponantur distantiæ Cκ & Eλ=CO; & per puncta κλ ducatur linea interminata.

Si verò Australe fuerit Declinans simul & Reclinans, protrahe lineas AC & FE versus X, ad κ usque & λ, addendo illis ipsam CO; & per puncta κλ ducatur linea interminata.

Deinde, ponatur Triang: Rectang: FEλ=ACO; &, dissectâ Chartâ in lineis Eλ, Pλ, plicetur in lineis CE, FE, ad rectos angulos: (retrorsum quidem in Australibus Inclinantibus, antrorsum in Australibus Reclinantibus,) ita ut λ Trianguli, coincidat cum altero λ lineæ EλX. Plana igitur ACEF & ELP, ad rectos angulos insistent Plano Horizontali XECκλ. Atque in hoc Situ quinque concipienda sunt Plana; Planum sc: Horizontale, XECκλ; Planum Erectum, ACEF; Planum Meridiani, ACX; quod etiam Gnomon Horizontale est; Planum Obliquum, AFλκ =AFLK Plano Declinationis, quoniam FL=Fλ. Tum, si à puncto X ducatur linea Xσ perpendicularis ipsi Fλ hypotenusæ Triang: Rectang: FEλ; patet, lineam imaginariam Aσ Substylarem esse Plani Obliqui; eique Lineam AS in Plano Declinationis congruere; & Styli Elevationem à Puncto σ esse Xσ =AR=ST; nam Rectang: Triang: Xσλ=ARN, quia Hypotenusa Xλ=(AG ± AH) AN, & Angulus FλE=ANR Complemento Obliquitatis. Patet etiam, quod in *Casu* 2do, *Capitis* 9ni, ubi AG⊐AH,

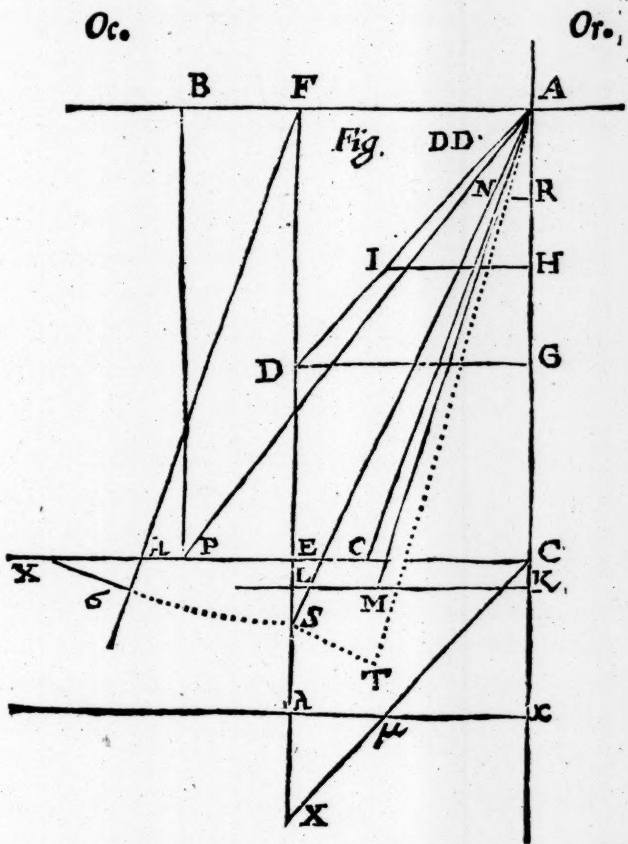
hoc

hoc est, $EX \sqsupset E\lambda$, Polus oppositus elevetur.

Postremò, Si Meridianus Horizontalis CX producatur donec Lineæ $\lambda\kappa$ in puncto μ occurrat; Linea $\kappa\mu$ æqualis erit & parallela ipsi KM=HI; nam Rect: Triang: $C\kappa\mu \doteq AHI$, quoniam $C\kappa = CO = AH$, & Ang: $\kappa C\mu = ECX = HAI$.

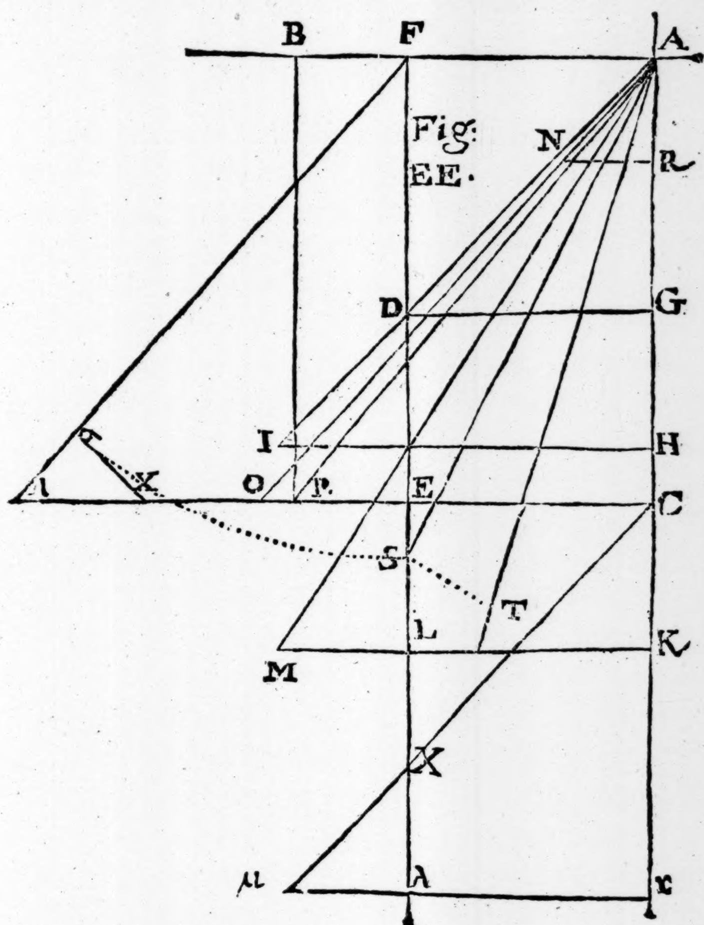
Demonstrationi inserviunt Figuræ Literis duplicibus notatæ CC. DD. EE. FF. *Figuris* C, D, E, F, *congruentes.*

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans:
In quo AG ⊏ AH, *hoc est,* EX ⊏ (CO =) Eλ.



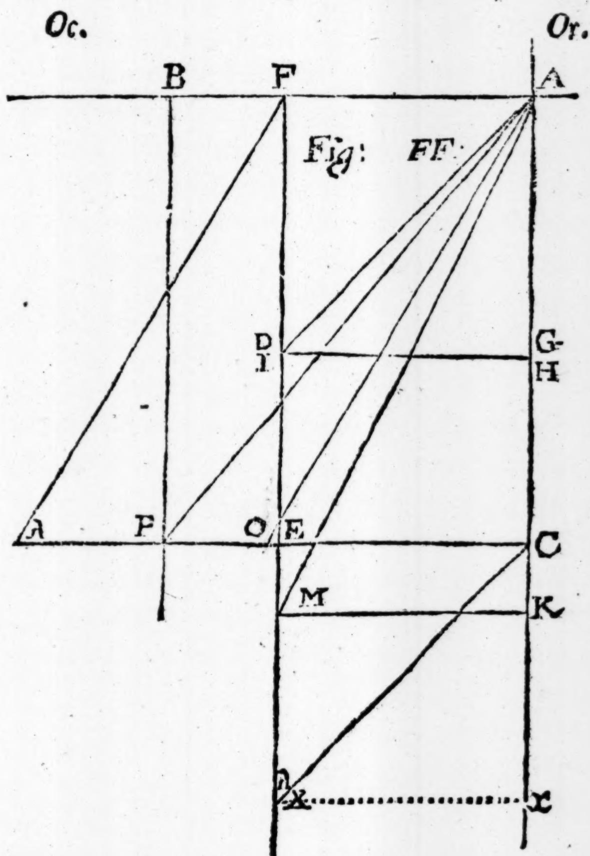
Septentrionale Declinans versus Orientem, & Inclinans.

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans:
In quo $AG \sqsubset AH$. Hoc est $EX \sqsubset (CO =) E\lambda$.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

Septentrionale Declinans versus Orientem, & Reclinans: In quo G & H sunt idem punctum: Hoc est, X & λ :Vel CO=EX.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

Cap. X.

Lineam Contingentem, & Æquinoctialem, cum Meridiana cæterisq; Lineis ejus Horariis, ducere.

1. PEr Regulas præcedentes (secundum Plani situm) debitè inscriptis, Meridiana AM, Substylari AS, & Stylo AT; accipiatur in Substylari (ubi magis appositum videbitur) punctum quodlibet Q, è quo linea longissima ad rectos angulos extendatur; cujus extremitas ad Ortum literis *Or*, ad Occasum *Occ*, notetur. Hæc Linea *Or. Q. Oc.* vulgò *Linea Contingens* dicitur; & reverâ est Unicâ Communis Intersectio plani Æquinoctialis, & plani Scioterici. Ubi hæc linea secat Meridianam AM, affige Literam N.

2. Centrum Æquinoctialis Æ, (è quo describendus est in Sciotericis Centralibus,) punctum est in Substylari, quod à puncto Q tantum distat, quantum ipsum Q, à vicinissimo Styli Puncto, Circino distare inveneris. At si non fuerit Centrale Sciotericum: quodlibet Substylaris punctum pro Centro Æquinoctialis assignare licet; hâc tantum observatâ Regulâ, quod quantum à Contingente distat Centrum Æquinoctialis, tantum à Substylari Stylum distare & parallelωs eminere necesse est.

3. Hoc itaque modo investigato Æquinoctialis Centro Æ, describatur ex eo (quolibet autem Intervallo,) *Contingentem* versus, Semicirculus Æquino-

ctialis; hoc est, ab utroque Substylaris Latere Quadrans. Deinde, Punctis Æ,N, admotâ Regulâ, ducatur Linea ÆN, Circulum Æquinoctialis secans in M. Linea autem ÆM Meridiana Æquinoctialis erit; à quâ sumitur initium Æquinoctialis utrinque dividendi in Horas, per Arcum 15 Graduum, vel in Semihoras per dimidiatos ejusmodi Arcus. Per divisiones verò singulas, è Centro Æ, obscuræ producendæ sunt lineæ ad Contingentem terminatæ: Quæ Lineæ Horariæ Æquinoctialis erunt.

4. Inde hæc oriuntur Consectaria. Primò, quòd in omnibus Sciotericis, quibus eadem Linea & Meridiana simul & Substylaris est, eadem quoque est Meridiana Æquinoctialis.

Secundò, quòd in Orientalibus & Occidentalibus Erectis, Illa Æquinoctialis Diameter quæ Lineæ Contingenti parallelωs jacet, ejusdem est Meridiana.

Tertiò, quòd Arcus Æquinoctialis inter Meridianam ejus, & Substylarem est Differentia Longitudinis, seu Meridiani, Loci subjecti, & Loci illius in Terra cui Planum istud Horizontale est; Locus autem iste ad easdem Partes Substylaris ubi Meridiana situatur; hoc est, ad Plagam illam cui vergit Declinatio, Orientem sc. vel Occidentem: At si Arcus iste nihil fuerit, idem est utriusque Loci Meridianus, & Latitudine tantum differunt.

Quartò, quod Orientalia & Occidentalia Erecta, Illis sunt Horizontalia, qui, sub Æquinoctiali, à Meridiano Loci gr. 90. in Ortum aut Occasum distantes habitant.

Postremò,

Postremò, quòd Orientalibus aut Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianus est à Meridiano Loci minùs 90 gr. remotus; & quò major Planorum Obliquitas, eò minor Meridianorum Differentia est.

5. Accipiemus, Exempli gratia, Scioterícon (*Capitis* VIIIi) Australe, in Ortum Declinans gr. 42°. 30′, Inclinans 24°. 00′; ut in *Figura* C. Cujus haud opus esse, opinor, Practicen ex integro deponere, quum perspicuè satis in hoc Capite jam tractata sit: sufficiat Lineas ipsas cum symbolis seu notis suis describere.

---

6. In tertio autem Casu *Capitis* IX; quoniam AM Substylaris est, & non Linea XII^{æ}. Meridiana Æquinoctialis peculiari Methodo indagatur, secundum hoc Theorema.

Ut Radius. ad Sinum Declinationis, ::
Ita Sinus Complementi Obliquitatis.
Ad Arcum Æquinoctialis, qui est distantia, Meridianæ Æquinoctialis à Substylari versus plagam Declinationis.

Geometricè

Geometricè verò ſic perficitur. Radio AB deſcribatur Arcus BD : & ſuper Lineam Obliquitatis AO, ponatur AZ=AF ; &, per punctum Z, ducatur Linea ZY, ipſi AB parallela, & Arcum BD ſecans in Y: jungantur etiam AY: adeoque habetur Angulus BAY ; cui Angulus æqualis AÆ*m* ponatur intra Circulum Æquinoctialem. Accipiatur, Exempli gratia, Sciotericon (in 3^tio^ *Caſu* IX^i^ *Capitis*) Auſtrale Declinans in Ortum 42°. 30'. Reclinans 30†.

Cap. XI.

Lineas Horarias describere, & propriis quamque numeris notare.

1. QUoniam Linea Contingentiæ *Or.Q.Oc.* unica est Linea utrisque Planis, tum Æquinoctialis tum Scioterici, communis, & in eâ designatos habes Linearum omnium Horariarum Terminos, facillimum erit & ipsas Lineas Horarias ducere.

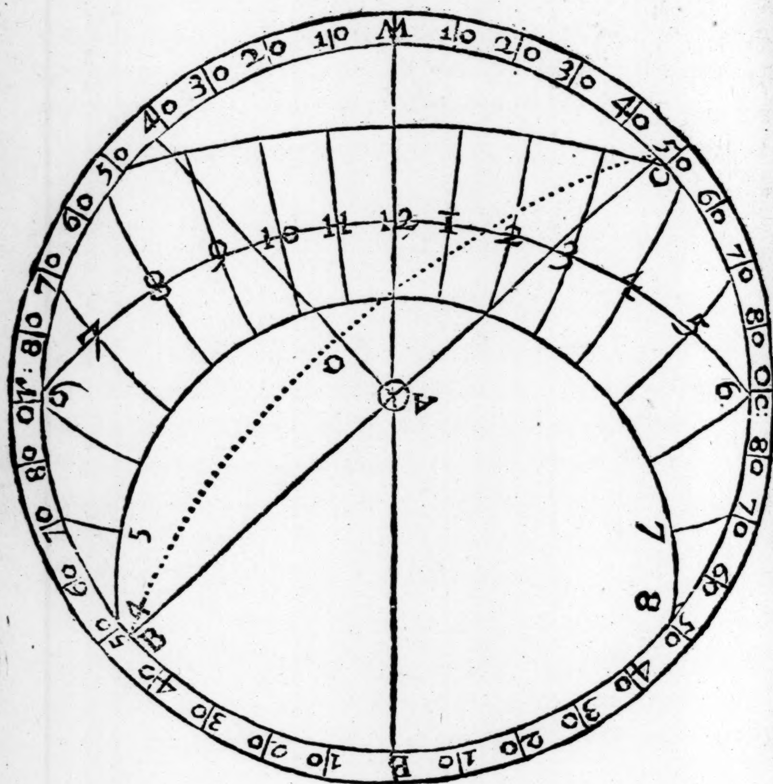
2. Nam, si Sciroterico Centrum fuerit; applicetur Centro A Regula; & per Singulas successivè Notas Lineæ producantur; quæ, si opus fuerit, etiam trans Centrum protrahendæ erunt, ut oppositas Horas indicent.

3. Si verò non fuerit Centrum; per Singulas hasce Notas, singulæ ducantur Lineæ, Substylari Parallelæ: quæ Lineæ erunt Horariæ. Stylus autem, ad distantiam QÆ Elevatus, Substylari Parallelus imminebit.

4. Lineæ Horariæ Numeris suis hoc modo distinguendæ sunt. A Meridiana incipe, eique XII affige: & inde cæteris Lineis prout serie suâ jacent, à partibus Occidentalibus asscribe XI, X, IX, VIII, &c. ab Orientalibus I, II, III, &c.

5. In hoc autem punctum omne tuleris, modò plures Lineas non descripseris, quàm quæ aliquo Anni tempore usu veniant: Quod Instrumento Projectionis Horizontalis invenitur: In quo inscribuntur tantum Meridianus Æquinoctialis, Tropicus uterque & quantum è Circulis Horariis inter Tropicos intercipitur: Centro autem affigitur Diameter mobilis BAC, unà cum Radio perpendiculari A 90, in gradus suos diviso; ut in Schemate videre est.

Instrumento



M
B
A
C
O
10 20 30 40 50 60 70 80 90
5 6 7 8 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8

Instrumento autem sic utimur. Gradus Obliquitatis, puncto delebili O, notetur in Radio: quem Gradui Declinationis in Margine affigas, (à Partibus quidem congruis, si Planum Inclinet; Oppositis verò, si Reclinet:) Deinde, per Extremitates utrasque Diametri mobilis, punctumque Obliquitatis O, Arcum Circuli COB ductum puta: Arcus iste, à Partibus Convexis, Planum Inclinans representabit; à Concavis autem, Reclinans; Ideoque Horas Plano ritè describendas exhibebit.

Exempli gratiâ. Sit Planum Australe in Ortum Declinans gradus 42°, 30′. Inclinans gradus 24; vel Planum Boreale Declinans in Occasum 42°, 30′. Reclinans 24°. Applicetur Radius gradui 42°, 30′, inter Ortum & Meridiem; notetur etiam Obliquitas Litera O. Deinde per tria hæc Puncta data, B, O, C, Arcum Circuli occultè ductum puta. Arcus iste à parte Convexa (hoc est, in Australi Inclinanti) ab Exortu Solis usque ad Primam Pomeridianam Horas indicabit: à Parte autem Concavâ (hoc est in Plano Boreali Reclinanti) à Secundâ Pomeridiana ad Occasum.

Observandum est Diametrum nobilem Murum aut Planum Erectum representare, cui Declinatio illa 42°, 30′, contingit.

Et ad hanc Methodum in omnimodis aliis Plani Positionibus vel Declinatione vel Obliquitate diversis hoc Instrumento utendum est.

6. Si Lineæ alicui Horariæ, sive Æquinoctialis sive ipsius Scioterici, non sit, intra Chartam, *Contingentis* Occurrendæ locus, adeo ut non deter Punctum Intersectionis

ſectionis cui congruè ducatur Linea : Contingentem utcunque in puncto *q* ſeca, ductâ Subſtylari parallelâ, quæ datam quoque Lineam Horariam ſecet: Sic Tres Lineæ dantur, ſcilicet ÆQ, Centri Æquinoctialis à Contingente Diſtantia; AQ Centri Scioterici à Contingente Diſtantia; & Parallelæ Segmentum inter Contingentem & Lineam Æquinoctialis horariam datam: Ex his Quarta invenitur, nempe Segmentum ejuſdem Parallelæ inter Contingentem, Lineamque Horariam Scioterici quæſitam. Ut in Schemate *Cap*. X. *Sect*. 5.

ÆQ. AQ:: qæ. qa.
Vel AQ, ÆQ:: qa. qæ.

7. Quoniam in Sciotericis fortaſſe VIII[i] *Capitis*, Punctum S Centro nimis propè inciderit, adeo ut Subſtylaris minus certo duci queat: Angulum CAS è Canone Triangulorum hoc modo invenire potes.

Ut Sinus ſemi-ſummæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis;
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens ſemi-complementi Declinationis;
Ad Tangentem *Arcus Primi*.

Rurſus,

Ut Sinus ſemi-ſummæ, Polaris Altitudinis, & Obliquitatis:
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens ſemi-complementi Declinationis;
Ad Tangentem *Secundi Arcus*.

Tum,

Tum, si Altitudo Polaris Obliquitatem excedat; Arcuum Differentia æqualis erit Angulo CAS: sin minùs, utrorumque summa.

8. In Sciotericis etiam *Capitum* VIII[i] & IX[i], si Angulus CAM pro Meridiano, inventu difficilior fuerit: dicito

Rad. Sin: Obliquitatis :: Tang: Declin. Tang: CAM.

SOLI DEO LAUS ET GLORIA.

F I N I S.
